
AP Photo/Mark Duncan, File

CAPÍTULO 10

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

En los capítulos precedentes modelamos situaciones reales por medio de ecuaciones, pero un gran número de estas situaciones contienen demasiadas variables para ser modeladas por una sola ecuación. Por ejemplo, el clima depende de la relación entre numerosas variables, incluyendo temperatura, rapidez del viento, presión del aire y humedad. En consecuencia, para modelar (y pronosticar) el clima, los científicos utilizan innumerables ecuaciones con muchas variables cada una de ellas. Estos conjuntos de ecuaciones, llamados sistemas de ecuaciones, *trabajan juntos* para describir el clima. Sistemas de ecuaciones con cientos de variables son utilizados por líneas aéreas para establecer horarios de vuelo consistentes, así como por empresas de telecomunicaciones para hallar rutas eficientes para llamadas telefónicas. En este capítulo aprendemos a resolver sistemas de ecuaciones que están formadas por varias ecuaciones con varias variables.

10.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones ▶ Método de sustitución ▶ Método por eliminación ▶ Método gráfico ▶ El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas ▶ Modelado con sistemas lineales

▼ Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

La gráfica de una ecuación lineal es una recta (vea Sección 1.10).

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal. Una **solución** de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera *cada una* de las ecuaciones. **Resolver** un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema.

Veamos a continuación un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2(3) - 1 = 5$ ✔	$3 + 4(1) = 7$ ✔

La solución también se puede escribir como el par ordenado (3, 1).

Observe que las gráficas de las Ecuaciones 1 y 2 son rectas (vea Figura 1). Como la solución (3, 1) satisface cada una de las ecuaciones, el punto (3, 1) se encuentra en cada recta. Por lo tanto, es el punto de intersección de las dos rectas.

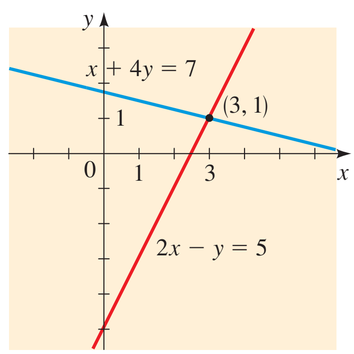


FIGURA 1

▼ Método de sustitución

En el **método de sustitución** empezamos con una ecuación en el sistema y despejamos una incógnita en términos de la otra incógnita. El recuadro siguiente describe el procedimiento.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1. **Despejar una incógnita.** Escoja una ecuación y despeje una incógnita en términos de la otra incógnita.
2. **Sustituir.** Sustituya la expresión hallada en el Paso 1 en la otra ecuación, para obtener una ecuación con una incógnita y, a continuación despeje esa incógnita.
3. **Sustituir a la inversa.** En la expresión hallada en el Paso 1, sustituya el valor hallado en el Paso 2 para despejar la incógnita restante.

EJEMPLO 1 | Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Despejar una incógnita. Despejamos y en la primera ecuación.

$$y = 1 - 2x \qquad \text{Despeje } y \text{ en la Ecuación 1}$$

Sustituir. A continuación sustituimos y en la segunda ecuación y despejamos x.

$$\begin{aligned} 3x + 4(1 - 2x) &= 14 && \text{Sustituya } y = 1 - 2x \text{ en la Ecuación 2} \\ 3x + 4 - 8x &= 14 && \text{Expanda} \\ -5x + 4 &= 14 && \text{Simplifique} \\ -5x &= 10 && \text{Reste 4} \\ x &= -2 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Sustitución. A continuación sustituimos $x = -2$ en la ecuación $y = 1 - 2x$.

$$y = 1 - 2(-2) = 5 \qquad \text{Sustitución}$$

Entonces, $x = -2$ y $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. La Figura 2 muestra que las gráficas de las dos ecuaciones se cruzan en el punto $(-2, 5)$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = -2, y = 5$:

$$\begin{cases} 2(-2) + 5 = 1 \\ 3(-2) + 4(5) = 14 \end{cases} \checkmark$$

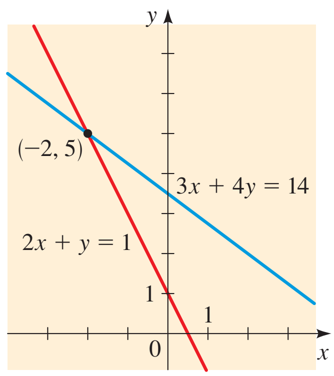


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

▼ Método por eliminación

Para resolver un sistema usando el **método de eliminación**, tratamos de combinar las ecuaciones usando sumas o restas para eliminar una de las incógnitas.

MÉTODO POR ELIMINACIÓN

1. **Ajustar los coeficientes.** Multiplique una o más de las ecuaciones por números apropiados, de modo que el coeficiente de una incógnita de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.
2. **Sumar las ecuaciones.** Sume las dos ecuaciones para eliminar una incógnita y, a continuación, despeje la incógnita restante.
3. **Sustituir a la inversa.** En una de las ecuaciones originales, sustituya el valor hallado en el Paso 2 y despeje la incógnita restante.

EJEMPLO 2 | Método por eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Como los coeficientes de los términos en y son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{array}{rcll} \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} & & & \text{Sistema} \\ \hline 4x \qquad & = & 16 & \text{Sume} \\ x & = & 4 & \text{Despeje } x \end{array}$$

A continuación sustituimos $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y despejamos y. Escojamos la segunda ecuación porque se ve más sencilla.

$$\begin{array}{rcll} x - 2y & = & 2 & \text{Ecuación 2} \\ 4 - 2y & = & 2 & \text{Sustituya } x = 4 \text{ en la Ecuación 2} \\ -2y & = & -2 & \text{Reste 4} \\ y & = & 1 & \text{Despeje } y \end{array}$$

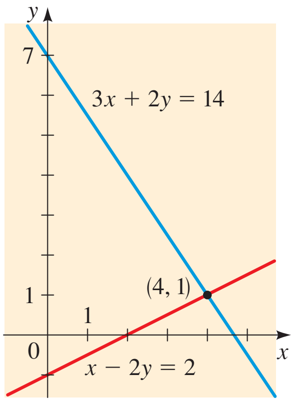


FIGURA 3

La solución es (4, 1). La Figura 3 muestra que las gráficas de las ecuaciones del sistema se cruzan en el punto (4, 1).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9

▼ Método gráfico

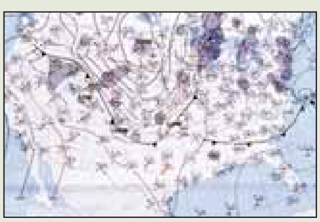
En el **método gráfico** usamos calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones.

MÉTODO GRÁFICO

1. **Graficar cada ecuación.** Exprese cada ecuación en una forma apropiada para la calculadora graficadora para despejar y como función de x. Grafique las ecuaciones en la misma pantalla.
2. **Hallar los puntos de intersección.** Las soluciones son las coordenadas x y y de los puntos de intersección.

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Predicción del clima



© Rachel Epstein/Photo Edit

Los meteorólogos modernos hacen mucho más que pronosticar el clima de mañana. Investigan modelos del clima a largo plazo, el agotamiento de la capa de ozono, el calentamiento global y otros efectos de la actividad humana en el clima. No obstante, el pronóstico diario del clima es todavía una parte importante de la meteorología; su valor es medido por las innumerables vidas humanas salvadas cada año por medio de un pronóstico preciso de huracanes, ventiscas y otros fenómenos catastróficos del clima. A principios del siglo XX unos matemáticos propusieron modelar el clima con ecuaciones que usaban los valores actuales de cientos de variables atmosféricas. Aun cuando este modelo funcionaba en principio, era imposible pronosticar modelos futuros con él por la dificultad para medir con precisión todas las variables y resolver todas las ecuaciones. Hoy en día, nuevos modelos matemáticos, combinados con simulaciones computarizadas de alta velocidad y mejores datos, han mejorado en gran medida el pronóstico del clima y con ello se han evitado numerosos desastres económicos y pérdidas de vida. Los matemáticos de la National Oceanographic and Atmospheric Administration (NOAA) están continuamente investigando mejores métodos para el pronóstico del clima.

EJEMPLO 3 | Método gráfico

Encuentre todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 1.35x - 2.13y = -2.36 \\ 2.16x + 0.32y = 1.06 \end{cases}$$

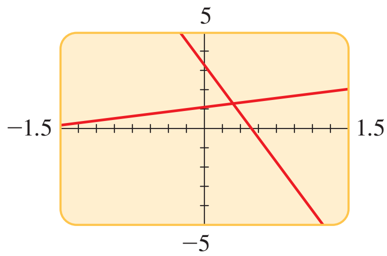


FIGURA 4

SOLUCIÓN Despejando y en términos de x, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 0.63x + 1.11 \\ y = -6.75x + 3.31 \end{cases}$$

donde hemos redondeado los coeficientes a dos decimales. La Figura 4 muestra que las dos rectas se cruzan; en un acercamiento vemos que la solución es aproximadamente (0.30, 1.3).

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **13** Y **49**

El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas

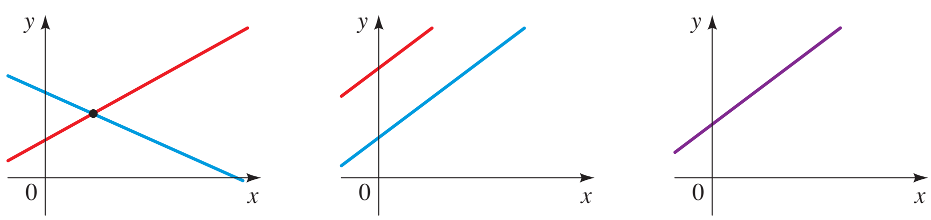
La gráfica de un sistema lineal con dos incógnitas es un par de rectas, de modo que, para resolver gráficamente el sistema, debemos hallar el (los) punto(s) de intersección de las rectas. Dos rectas pueden cruzarse en un solo punto, pueden ser paralelas o pueden coincidir, como se ve en la Figura 5. Por lo tanto, hay tres posibles resultados para resolver el sistema.

NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

Para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera. (Vea Figura 5.)

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene solución es **inconsistente**. Un sistema con un infinito de soluciones se llama **consistente indeterminado**.



(a) Las rectas se cruzan en un solo punto. El sistema tiene una solución.

(b) Las rectas son paralelas y no se cruzan. El sistema no tiene solución.

(c) Las rectas coinciden; las ecuaciones son para la misma recta. El sistema tiene un infinito de soluciones.

FIGURA 5

EJEMPLO 4 | Un sistema lineal con una solución

Resuelva el sistema y grafique las rectas.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 5x + 2y = 22 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

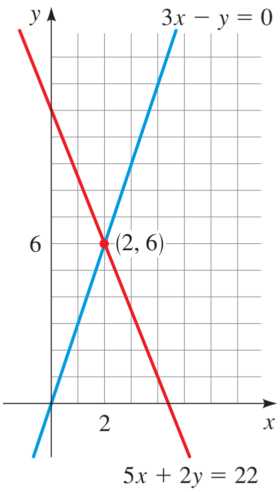


FIGURA 6

SOLUCIÓN Eliminamos y de las ecuaciones y despejamos x.

$$\begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ 5x + 2y = 22 \end{cases} \qquad 2 \times \text{Ecuación 1}$$

$$11x \qquad = 22 \qquad \text{Sume}$$

$$x = 2 \qquad \text{Despeje } x$$

Ahora sustituimos de nuevo en la primera ecuación y despejamos y:

$$6(2) - 2y = 0 \qquad \text{Sustituimos de nuevo } x = 2$$

$$-2y = -12 \qquad \text{Restamos } 6 \times 2 = 12$$

$$y = 6 \qquad \text{Despejamos } y$$

La solución del sistema es el par ordenado (2, 6), es decir,

$$x = 2, \qquad y = 6$$

La gráfica de la Figura 6 muestra que las rectas del sistema se cruzan en el punto (2, 6).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 2, \quad y = 6$:

$$\begin{cases} 3(2) - \ (6) = 0 \\ 5(2) + 2(6) = 22 \end{cases} \quad ✔$$

EJEMPLO 5 | Un sistema lineal sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 \\ -12x + 3y = 7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

SOLUCIÓN Esta vez tratamos de hallar una combinación apropiada de las dos ecuaciones para eliminar la variable y. La multiplicación de la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2 da

$$\begin{cases} 24x - 6y = 15 \\ -24x + 6y = 14 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 3 \times \text{Ecuación 1} \\ 2 \times \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

$$0 = 29 \qquad \text{Sume}$$

La suma de las dos ecuaciones elimina *tanto x como y* en este caso, y terminamos con $0 = 29$, que es obviamente falso. No importa qué valores asignemos a x y a y, no podemos hacer que este enunciado sea verdadero, de manera que el sistema *no tiene solución*. La Figura 7 muestra que las rectas del sistema son paralelas y no se cruzan. El sistema es inconsistente.

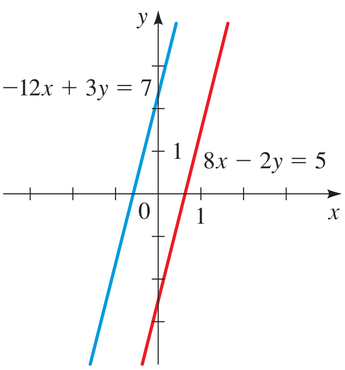


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 6 | Un sistema lineal con un infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 4x - 8y = 16 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

SOLUCIÓN Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones para eliminar x. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 \\ 12x - 24y = 48 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 4 \times \text{Ecuación 1} \\ 3 \times \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

Vemos que las dos ecuaciones del sistema original son simplemente formas diferentes de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta dan

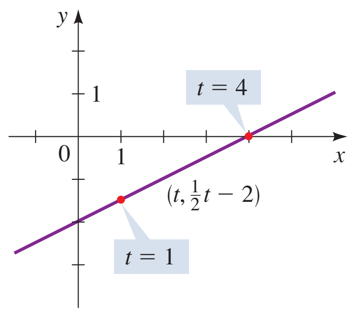


FIGURA 8

una solución del sistema. Escribiendo la ecuación en forma de pendiente e intersección, tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Por lo tanto, si con t representamos cualquier número real, podemos escribir la solución como

$$x = t$$
$$y = \tfrac{1}{2}t - 2$$

También podemos escribir la solución en forma de par ordenado como

$$\left(t, \tfrac{1}{2}t - 2\right)$$

donde t es cualquier número real. El sistema tiene un infinito de soluciones (vea Figura 8).

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **37**

En el Ejemplo 3, para obtener soluciones específicas tenemos que asignar valores a t. Por ejemplo, si $t = 1$, obtenemos la solución $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. si $t = 4$, obtenemos la solución $(4, 0)$. Para todo valor de t obtenemos una solución diferente. (Vea Figura 8.)

Modelado con sistemas lineales

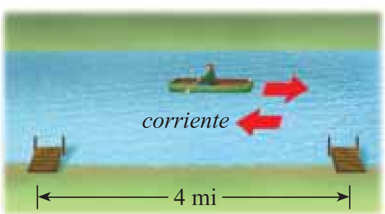
Con frecuencia, cuando usamos ecuaciones para resolver problemas en las ciencias o en otros campos de actividad, obtenemos sistemas como el que acabamos de considerar. Cuando modelamos con sistemas de ecuaciones, usamos las siguientes guías, que son semejantes a las de la Sección 1.6.

GUÍA PARA MODELAR CON SISTEMAS DE ECUACIONES

1. **Identificar las variables.** Identifique las cantidades que el problema pide hallar. Éstas en general se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca notación para las variables (llámelas x y y o con alguna otra letra).
2. **Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de las variables.** Lea otra vez el problema, y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de las variables que haya definido en el Paso 1.
3. **Establezca un sistema de ecuaciones.** Encuentre los datos cruciales del problema que den las relaciones entre las expresiones que haya encontrado en el Paso 2. Establezca un sistema de ecuaciones (o un modelo) que exprese estas relaciones.
4. **Resuelva el sistema e interprete los resultados.** Resuelva el sistema que haya encontrado en el Paso 3, verifique sus soluciones y dé su respuesta final como una frase que conteste la pregunta planteada en el problema.

Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo modelar con sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 7 | Un problema de distancia, rapidez y tiempo



Una mujer rema un bote aguas arriba desde un punto en un río, a otro punto a 4 millas de distancia, en $1\frac{1}{2}$ horas. El viaje de regreso, a favor de la corriente, le toma sólo 45 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que rema con respecto al agua, y con qué velocidad se mueve la corriente?

SOLUCIÓN Identificar las variables. Nos piden hallar la velocidad con la que rema la mujer y la velocidad de la corriente, de modo que hacemos

$$x = \text{velocidad de remar (mi/h)}$$
$$y = \text{velocidad de la corriente (mi/h)}$$

Expresar cantidades desconocidas en términos de la variable. La velocidad de la mujer cuando rema aguas arriba es su velocidad para remar menos la velocidad de la corriente; su velocidad aguas abajo es su velocidad para remar más la velocidad de la corriente. Ahora convertimos esta información al lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Velocidad de remo	x
Velocidad de la corriente	y
Velocidad aguas arriba	$x - y$
Velocidad aguas abajo	$x + y$

Establecer un sistema de ecuaciones. La distancia aguas arriba y aguas abajo es 4 millas, de modo que usando el hecho de que velocidad $\times$ tiempo $=$ distancia para los dos tramos del viaje, tenemos

velocidad aguas arriba $\times$ tiempo aguas arriba $=$ distancia recorrida

velocidad aguas abajo $\times$ tiempo aguas abajo $=$ distancia recorrida

En notación algebraica esto se convierte en las ecuaciones siguientes:

$$(x - y)\tfrac{3}{2} = 4 \qquad \text{Ecuación 1}$$

$$(x + y)\tfrac{3}{4} = 4 \qquad \text{Ecuación 2}$$

(Los tiempos se han convertido a horas, porque estamos expresando la rapidez en millas por *hora*.)

Resolver el sistema. Multiplicamos las ecuaciones por 2 y 4, respectivamente, para despejar los denominadores.

$$\begin{cases} 3x - 3y = 8 & 2 \times \text{Ecuación 1} \\ 3x + 3y = 16 & 4 \times \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 6x &= 24 && \text{Sume} \\ x &= 4 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de x en la primera ecuación (también funciona la segunda) y despejando y, tendremos

$$\begin{aligned} 3(4) - 3y &= 8 && \text{Sustituya } x = 4 \\ -3y &= 8 - 12 && \text{Reste 12} \\ y &= \tfrac{4}{3} && \text{Despeje } y \end{aligned}$$

La mujer rema a 4 mi/h, y la corriente se mueve a $1\frac{1}{3}$ mi/h.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Velocidad contra la corriente es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{1\frac{1}{2}\text{ h}} = 2\tfrac{2}{3}\text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo $-$ flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} - \tfrac{4}{3}\text{ mi/h} = 2\tfrac{2}{3}\text{ mi/h}$$

Velocidad rio abajo es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{\frac{3}{4}\text{ h}} = 5\tfrac{1}{3}\text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo $+$ flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} + \tfrac{4}{3}\text{ mi/h} = 5\tfrac{1}{3}\text{ mi/h} \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

EJEMPLO 8 | Un problema de mezclas

Un vinatero fortifica vino que contiene 10% de alcohol al agregarle una solución de alcohol al 70%. La mezcla resultante tiene un contenido alcohólico del 16% y llena 1000 botellas de un litro. ¿Cuántos litros (L) del vino y la solución de alcohol usa el vinatero?

SOLUCIÓN Identificar las variables. Como nos piden las cantidades de vino y alcohol, hacemos

$$x = \text{cantidad de vino utilizado (L)}$$

$$y = \text{cantidad de solución de alcohol utilizada (L)}$$

Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de la variable. Del hecho que el vino contiene 10% de alcohol y la solución contiene 70% de alcohol, obtenemos lo siguiente.

En palabras	En álgebra
Cantidad de vino utilizada (L)	x
Cantidad de solución de alcohol utilizada (L)	y
Cantidad de alcohol en vino (L)	$0.10x$
Cantidad de alcohol en solución (L)	$0.70y$

Establecer un sistema de ecuaciones. El volumen de la mezcla debe ser el total de los dos volúmenes que el vinatero mezcla, y

$$x + y = 1000$$

También, la cantidad de alcohol en la mezcla debe ser el total del alcohol aportado por el vino y por la solución de alcohol, es decir,

$$0.10x + 0.70y = (0.16)1000$$

$$0.10x + 0.70y = 160 \qquad \text{Simplifique}$$

$$x + 7y = 1600 \qquad \text{Multiplique por 10 para quitar decimales}$$

En consecuencia, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1000 & \text{Ecuación 1} \\ x + 7y = 1600 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Resolver el sistema. Restando la primera ecuación de la segunda se elimina la variable x y obtenemos

$$6y = 600 \qquad \text{Reste la Ecuación 1 de la Ecuación 2}$$

$$y = 100 \qquad \text{Despeje } y$$

Ahora sustituimos $y = 100$ en la primera ecuación y despejamos x.

$$x + 100 = 1000 \qquad \text{Sustituimos } y = 100$$

$$x = 900 \qquad \text{Despejamos } x$$

El vinatero utiliza 900 L de vino y 100 L de solución de alcohol.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65** ■

10.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

es un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas _________ y _________. Para determinar si $(5, -1)$ es una solución de este sistema, verificamos si $x = 5$ y $y = -1$ satisfacen cada _________ del sistema. ¿Cuáles de las siguientes son soluciones de este sistema?

$$(5, -1), \quad (-1, 3), \quad (2, 1)$$

2. Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puede ser resuelto por el método de _________, el método de _________ o el método _________.

3. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una solución, _________ solución o _________ _________ soluciones.

4. El siguiente es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

La gráfica de la primera ecuación es la misma que la gráfica de la segunda ecuación, de manera que el sistema tiene _________ _________ soluciones. Expresamos estas soluciones escribiendo

$$x = t$$
$$y = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

donde t es cualquier número real. Algunas de las soluciones de este sistema son $(1, \_\_)$, $(-3, \_\_)$ y $(5, \_\_)$.

HABILIDADES

5-8 ■ Use el método de sustitución para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

5. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

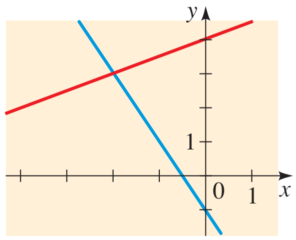
9-12 ■ Use el método de eliminación para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

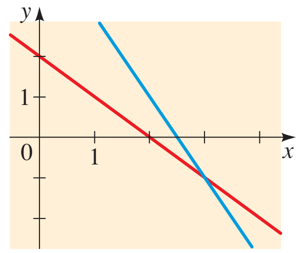
9. $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x + y = 21 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 8x + 4y = 12 \end{cases}$

13-14 ■ Nos dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el (los) punto(s) de intersección de las gráficas resolviendo el sistema.

13. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$





15-20 ■ Grafique cada uno de los sistemas lineales siguientes, ya sea manualmente o con calculadora graficadora. Use la gráfica para determinar si el sistema tiene una solución, no tiene solución o tiene un infinito de soluciones. Si hay exactamente una solución, use la gráfica para hallarla.

15. $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -x + \frac{3}{2}y = 4 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -3x - 9y = 18 \end{cases}$

19. $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} 12x + 15y = -18 \\ 2x + \frac{5}{2}y = -3 \end{cases}$

21-48 ■ Resuelva el sistema, o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene un infinito de soluciones, expréselas en la forma de par ordenado dado en el Ejemplo 6.

21. $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 8 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} 4x - 3y = 28 \\ 9x - y = -6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} -4x + 12y = 0 \\ 12x + 4y = 160 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} 0.2x - 0.2y = -1.8 \\ -0.3x + 0.5y = 3.3 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 5y = 70 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 9x - 15y = 6 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 14x - 21y = 3 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 25x - 75y = 100 \\ -10x + 30y = -40 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 8s - 3t = -3 \\ 5s - 2t = -1 \end{cases}$

42. $\begin{cases} u - 30v = -5 \\ -3u + 80v = 5 \end{cases}$

43. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + 2y = 10 \end{cases}$

44. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

45. $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 14 \\ 12x - 5y = 10 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 26x - 10y = -4 \\ -0.6x + 1.2y = 3 \end{cases}$

47. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$

48. $\begin{cases} -\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 2x - 10y = -80 \end{cases}$

49-52 ■ Use calculadora graficadora para graficar ambas rectas en el mismo rectángulo de vista. (Observe que debe despejar *y* en términos de *x* antes de graficar si usa calculadora graficadora.) Resuelva el sistema redondeado a dos lugares decimales, ya sea con acercamiento y usando `TRACE` o usando la función `Intersect`.

49. $\begin{cases} 0.21x + 3.17y = 9.51 \\ 2.35x - 1.17y = 5.89 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 18.72x - 14.91y = 12.33 \\ 6.21x - 12.92y = 17.82 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2371x - 6552y = 13{,}591 \\ 9815x + 992y = 618{,}555 \end{cases}$

52. $\begin{cases} -435x + 912y = 0 \\ 132x + 455y = 994 \end{cases}$

53-56 ■ Encuentre *x* y *y* en términos de *a* y *b*.

53. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases} \quad (a \neq 1)$

54. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (a \neq b)$

55. $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases} \quad (a^2 - b^2 \neq 0)$

56. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0, a \neq b)$

APLICACIONES

57. Problema de números Encuentre dos números cuya suma es 34 y cuya diferencia es 10.

58. Problema de números La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más que el doble del más pequeño. Encuentre los números.

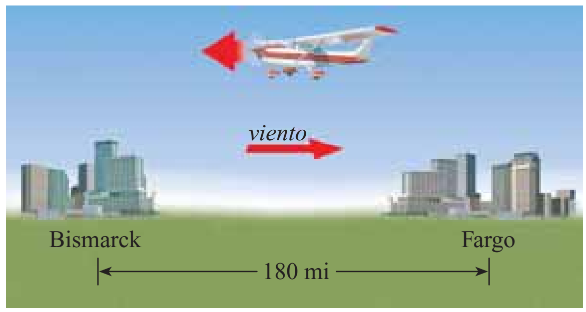
59. Valor de monedas Un hombre tiene 14 monedas en su bolsillo, todas las cuales son de 10 o de 25 centavos. Si el valor total de su cambio es $2.75, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tiene?

60. Precio de entrada El precio de entrada a un parque de diversiones es $1.50 para niños y $4.00 para adultos. En cierto día, 2200 personas entraron al parque, y los precios de entrada recolectados sumaron $5050. ¿Cuántos niños y cuántos adultos entraron?

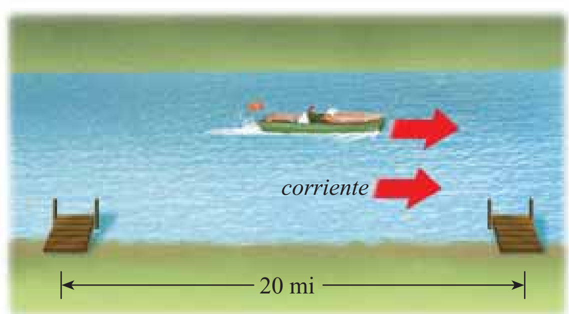
61. Gasolinera Una gasolinera vende gasolina regular en $2.20 el galón y gasolina Premium en $3.00 el galón. Al final del día se vendieron 280 galones de gasolina y los recibos totalizaron $680. ¿Cuántos galones de cada tipo se vendieron?

62. Puesto de frutas Un puesto de frutas vende dos variedades de fresas: estándar y de lujo. Una caja de fresas estándar se vende en $7 y una de lujo se vende en $10. En un día, el puesto vende 135 cajas de fresas en un total de $1100. ¿Cuántas cajas de cada tipo se vendieron?

63. Velocidad de un avión Un hombre vuela en un pequeño avión de Fargo a Bismarck, Dakota del Norte, una distancia de 180 millas. Debido a que hizo el vuelo con un viento de frente, el viaje le lleva 2 horas. En el viaje de regreso, el viento todavía está soplando con la misma velocidad, de modo que el viaje le lleva sólo 1 h 12 min. ¿Cuál es la velocidad del piloto con viento en calma, y con qué velocidad sopla el viento?



64. Velocidad de un bote Un bote en un río navega aguas abajo entre dos puntos, a 20 millas de distancia, en una hora. El viaje de regreso contra la corriente toma $2\frac{1}{2}$ horas. ¿Cuál es la velocidad del bote, y con qué velocidad se mueven las aguas del río?



65. Nutrición Una investigadora realiza un experimento para probar una hipótesis donde intervienen los nutrientes niacina y retinol. Ella alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta diaria de precisamente 32 unidades de niacina y 22,000 unidades de retinol. Ella usa dos tipos de alimentos comerciales en forma de pastillas. El alimento A contiene 0.12 unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo; el alimento B contiene 0.20 unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento les da ella al grupo de ratas diariamente?

66. Mezclas de café Un cliente en una cafetería compra una mezcla de dos clases de café: Kenia, que cuesta \$3.50 la libra, y Sri Lanka, que cuesta \$5.60 la libra. Él compra 3 libras de la mezcla, que le cuestan \$11.55. ¿Cuántas libras de cada clase entraron en la mezcla?

67. Problema de mezclas Un químico tiene dos grandes contenedores de solución de ácido sulfúrico, con diferentes concentraciones de ácido en cada contenedor. La mezcla de 300 mL de la primera solución y 600 mL de la segunda le da una mezcla que es 15% ácida, mientras que si mezcla 100 mL de la primera y 500 mL de la segunda le da una mezcla $12\frac{1}{2}$% ácida. ¿Cuáles son las concentraciones de ácido sulfúrico en los recipientes originales?

68. Problema de mezclas Una bióloga tiene dos soluciones de salmuera, una contiene 5% de sal y otra contiene 20% de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe ella mezclar para obtener 1 L de una solución que contenga 14% de sal?

69. Inversiones Una mujer invierte un total de \$20,000 en dos cuentas, una paga 5% y la otra paga 8% de interés simple al año. El interés anual que ella percibe es \$1180. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

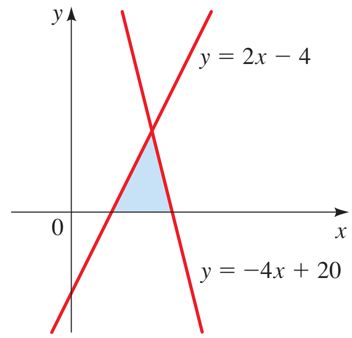
70. Inversiones Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas, una paga 6% y la otra paga 10% de interés simple al año. Él pone el doble en la cuenta que rinde menos porque es de menos riesgo. El interés que él percibe es \$3520. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

71. Distancia, velocidad y tiempo Juan y María salen de su casa al mismo tiempo y en auto se dirigen en direcciones opuestas. Juan maneja a 60 mi/h y viaja 35 millas más que María, quien maneja a 40 mi/h. El viaje de María toma 15 minutos más que a Juan. ¿Durante cuánto tiempo manejan ellos?

72. Ejercicio aeróbico Una mujer se mantiene en forma haciendo ejercicio en bicicleta y corriendo todos los días. El lunes ella pasa $1\frac{1}{2}$ horas en cada una de esas actividades, cubriendo un total de $12\frac{1}{2}$ millas. El martes corre durante 12 minutos y anda en bicicleta 45 minutos, cubriendo un total de 16 millas. Suponiendo que su velocidad para correr y andar en bicicleta no cambian de un día a otro, encuentre esas velocidades.

73. Problema de números La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 7. Cuando los dígitos se invierten, el número aumenta en 27. Encuentre el número.

74. Área de un triángulo Encuentre el área del triángulo que se encuentra en el primer cuadrante (con la base sobre el eje x) y que está limitado por las rectas $y = 2x - 4$ y $y = -4x + 20$.



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

75. La recta de mínimos cuadrados La recta de *mínimos cuadrados* o recta de *regresión* es la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos en el plano. Estudiamos esta recta en el *Enfoque sobre modelado* que sigue al Capítulo 1 (vea página 130.) Mediante cálculo, se puede demostrar que la recta que mejor se ajusta a los n puntos de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ es la recta $y = ax + b$, donde los coeficientes a y b satisfacen el siguiente par de ecuaciones lineales. (La notación $\sum_{k=1}^{n} x_k$ representa la suma de todas las x. En la Sección 12.1 vea una descripción completa de la notación (Σ).)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)a + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Use estas ecuaciones para hallar la recta de mínimos cuadrados para los siguientes puntos de datos.

$$(1, 3), \quad (2, 5), \quad (3, 6), \quad (5, 6), \quad (7, 9)$$

Trace los puntos y su recta para confirmar que la recta se ajusta bien a estos puntos. Si su calculadora calcula regresión lineal, vea si le da la misma recta que las fórmulas.

10.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON VARIAS INCÓGNITAS

Solución de un sistema lineal ▶ El número de soluciones de un sistema lineal ▶ Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

Una **ecuación lineal con *n* incógnitas** es una ecuación que se puede poner en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y c son números reales, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas. Si sólo tenemos tres o cuatro incógnitas, en general usamos x, y, z y w en lugar de x_1, x_2, x_3, y x_4. Tales ecuaciones se llaman *lineales* porque si tenemos sólo dos incógnitas, la ecuación es $a_1x + a_2y = c$, que es la ecuación de una recta. A continuación veamos algunos ejemplos de ecuaciones con tres incógnitas que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	Ecuaciones no lineales	
$6x_1 - 3x_2 + \sqrt{5}x_3 = 10$	$x^2 + 3y - \sqrt{z} = 5$	No lineal porque contiene el cuadrado y la raíz cuadrada de una incógnita
$x + y + z = 2w - \frac{1}{2}$	$x_1x_2 + 6x_3 = -6$	No lineal porque contiene un producto de incógnita

En esta sección estudiamos sistemas de ecuaciones lineales con tres o más incógnitas.

▼ Solución de un sistema lineal

Los siguientes son dos ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. El segundo sistema está en **forma triangular**; esto es, la incógnita x no aparece en la segunda ecuación, y las incógnitas x y y no aparecen en la tercera ecuación.

Un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -x + 3y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 10 \end{cases}$$

Un sistema en forma triangular

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Es fácil resolver un sistema que está en forma triangular si se usa sustitución. Entonces nuestro objetivo en esta sección es empezar con un sistema de ecuaciones lineales, y cambiarlo a un sistema en forma triangular que tiene las mismas soluciones que el sistema original. Empezamos por mostrar cómo usar sustitución para resolver un sistema que ya está en forma triangular.

EJEMPLO 1 | Resolver un sistema triangular usando sustitución

Resuelva el sistema usando sustitución:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ y + 2z = 5 & \text{Ecuación 2} \\ z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN De la última ecuación sabemos que $z = 3$. Hacemos sustitución de esta ecuación en la segunda ecuación y despejamos y.

$$y + 2(3) = 5 \qquad \text{Sustitución de } z = 3 \text{ en la Ecuación 2}$$

$$y = -1 \qquad \text{Despejamos } y$$

A continuación sustituimos $y = -1$ y $z = 3$ en la primera ecuación y despejamos x.

$$x - 2(-1) - (3) = 1 \qquad \text{Sustituimos } y = -1 \text{ y } z = 3 \text{ en la Ecuación 1}$$

$$x = 2 \qquad \text{Despejamos } x$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$. También podemos escribir la solución como la terna ordenada $(2, -1, 3)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 7 ■

Para cambiar un sistema de ecuaciones lineales a un **sistema equivalente** (esto es, un sistema con las mismas soluciones que el sistema original), usamos el método por eliminación. Esto significa que podemos usar las siguientes operaciones.

OPERACIONES QUE DAN UN SISTEMA EQUIVALENTE

1. Sumar un múltiplo diferente de cero de una ecuación a otra.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Intercambiar las posiciones de dos ecuaciones.

Para resolver un sistema lineal, usamos estas operaciones para cambiar el sistema a un sistema triangular equivalente. Entonces usamos sustitución como en el Ejemplo 1. Este proceso se denomina **eliminación de Gauss**.

EJEMPLO 2 | Resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Resuelva el sistema usando eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ x + 2y - z = 13 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 2y - 5z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Necesitamos cambiar esto a un sistema triangular, de modo que empezamos por eliminar el término en x de la segunda ecuación.

$$\begin{array}{rl} x + 2y - z = 13 & \text{Ecuación 2} \\ x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ \hline 4y - 4z = 12 & \text{Ecuación 2} + (-1) \times \text{Ecuación 1} = \text{nueva Ecuación 2} \end{array}$$

Esto nos da un nuevo sistema equivalente que es un paso más cercano a la forma triangular.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 4y - 4z = 12 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 2y - 5z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora eliminamos el término en x de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y - 5z = 3 \\ -3x + 6y - 9z = -3 \\ \hline 8y - 14z = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4y - 4z = 12 \\ 8y - 14z = 0 & \text{Ecuación 3} + (-3) \times \text{Ecuación 1} = \text{nueva Ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora eliminamos el término en y de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{r} 8y - 14z = 0 \\ -8y + 8z = -24 \\ \hline -6z = -24 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4y - 4z = 12 \\ -6z = -24 & \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{Ecuación 2} = \text{nueva Ecuación 3} \end{cases}$$

El sistema está ahora en forma triangular, pero será más fácil de trabajar si dividimos las ecuaciones segunda y la tercera por los factores comunes de cada término.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 3 & \frac{1}{4} \times \text{Ecuación 2} = \text{nueva Ecuación 2} \\ z = 4 & -\frac{1}{6} \times \text{Ecuación 3} = \text{nueva Ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora usamos sustitución para resolver el sistema. De la tercera ecuación obtenemos $z = 4$. Sustituimos esto en la segunda ecuación y despejamos y.

$$\begin{array}{rl} y - (4) = 3 & \text{Sustituimos } z = 4 \text{ en la Ecuación 2} \\ y = 7 & \text{Despejamos } y \end{array}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 3, y = 7, z = 4$:

$$\begin{aligned} (3) - 2(7) + 3(4) &= 1 \\ (3) + 2(7) - (4) &= 13 \\ 3(3) + 2(7) - 5(4) &= 3 \end{aligned}$$ ✔

Ahora sustituimos $y = 7$ y $z = -4$ en la primera ecuación y despejamos x.

$$x - 2(7) + 3(4) = 1 \qquad \text{Sustituimos } y = 7 \text{ y } z = 4 \text{ en la Ecuación 1}$$

$$x = 3 \qquad \text{Despejamos } x$$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 7$, $z = 4$, que podemos escribir como la terna ordenada (3, 7, 4).

INTENTE AHORA HACER EL EJERCICIO **17**

El número de soluciones de un sistema lineal

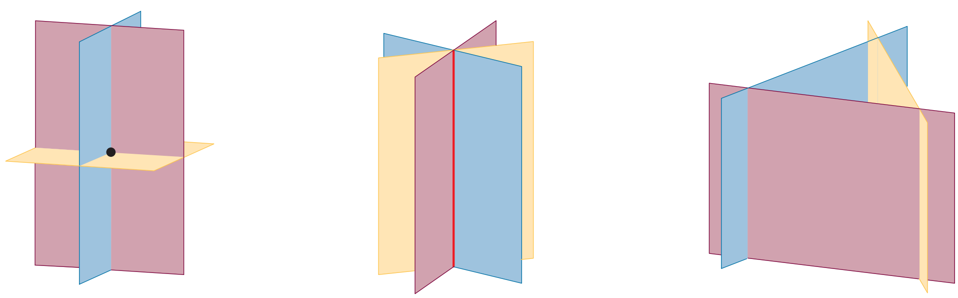
La gráfica de una ecuación lineal con tres incógnitas es un plano en espacio tridimensional (vea Sección 9.6). Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas representa tres planos en el espacio. Las soluciones del sistema son los puntos donde se cruzan los tres planos. Tres planos se intersectan en un punto, una recta, no se cruzan o los tres planos pueden coincidir. La Figura 1 ilustra algunas de las posibilidades. Verificando estas posibilidades vemos que hay tres posibles resultados cuando se resuelve uno de estos sistemas.

NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL

Para un sistema de ecuaciones lineales, exactamente uno de lo siguiente es verdadero.

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene un infinito de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene soluciones es **inconsistente**, y un sistema con un infinito de soluciones es **consistente indeterminado**. Como vemos en el siguiente ejemplo, un sistema lineal no tiene solución si terminamos con una *ecuación falsa* después de aplicar la eliminación de Gauss al sistema.



(a) Los tres planos se intersectan en un solo punto. El sistema tiene una solución.

(b) Los tres planos se intersectan en más de un punto. El sistema tiene un infinito de soluciones.

(c) Los tres planos no tienen punto en común. El sistema no tiene solución.

FIGURA 1

EJEMPLO 3 | Un sistema que no tiene solución

Resuelva el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 2x + 2y - z = 6 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 4y - 3z = 5 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Para poner en forma triangular, empezamos por eliminar los términos en x de la segunda ecuación y la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ \quad -2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 3z = 5 \end{cases}$$ Ecuación 2 + (–2) × Ecuación 1 = nueva Ecuación 2

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ \quad -2y + 3z = 4 \\ \quad -2y + 3z = 2 \end{cases}$$ Ecuación 3 + (–3) × Ecuación 1 = nueva Ecuación 3

Ahora eliminamos el término en y de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ \quad -2y + 3z = 4 \\ \qquad\qquad 0 = 2 \end{cases}$$ Ecuación 3 + (–1) × Ecuación 2 = nueva Ecuación 3

El sistema está ahora en forma triangular, pero la tercera ecuación dice que $0 = 2$, lo cual es falso. No importa qué valores asignemos a x, y y z, la tercera ecuación nunca será verdadera. Esto significa que el sistema *no tiene solución*.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

EJEMPLO 4 | Un sistema con un infinito de soluciones

Resuelva el sistema siguiente

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 & \text{Ecuación 1} \\ 2x + y + 4z = 2 & \text{Ecuación 2} \\ 2x + 4y - 2z = 8 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Para poner esto en forma triangular, empezamos por eliminar los términos en x de las ecuaciones segunda y tercera.

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ \qquad 3y - 6z = 6 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \end{cases}$$ Ecuación 2 + (–2) × Ecuación 1 = nueva Ecuación 2

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ \quad 3y - 6z = 6 \\ \quad 6y - 12z = 12 \end{cases}$$ Ecuación 3 + (–2) × Ecuación 1 = nueva Ecuación 3

Ahora eliminamos el término en y de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ \quad 3y - 6z = 6 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$ Ecuación 3 + (–2) × Ecuación 2 = nueva Ecuación 3

La nueva tercera ecuación es verdadera pero no nos da información nueva, de modo que podemos eliminarla del sistema. Sólo nos quedan dos ecuaciones. Podemos usarlas para despejar x y y en términos de z, pero z puede tomar cualquier valor, de manera que hay un número infinito de soluciones.

Para hallar la solución completa del sistema, empezamos por despejar y en términos de z, usando la nueva segunda ecuación.

$$3y - 6z = 6 \qquad \text{Ecuación 2}$$

$$y - 2z = 2 \qquad \text{Multiplique por } \tfrac{1}{3}$$

$$y = 2z + 2 \qquad \text{Despeje } y$$

A continuación despejamos x en términos de z, usando la primera ecuación.

$$x - (2z + 2) + 5z = -2 \qquad \text{Sustituya } y = 2z + 2 \text{ en la Ecuación 1}$$
$$x + 3z - 2 = -2 \qquad \text{Simplifique}$$
$$x = -3z \qquad \text{Despeje } x$$

Para describir la solución completa, con t representamos cualquier número real. La solución es

$$x = -3t$$
$$y = 2t + 2$$
$$z = t$$

También podemos escribir esto como la terna ordenada $(-3t, 2t + 2, t)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

En la solución del Ejemplo 4 la variable t se denomina **parámetro**. Para obtener una solución específica, damos un valor específico al parámetro t. Por ejemplo, si hacemos $t = 2$, obtenemos

$$x = -3(2) = -6$$
$$y = 2(2) + 2 = 6$$
$$z = 2$$

Por lo tanto, $(-6, 6, 2)$ es una solución del sistema. A continuación veamos algunas otras soluciones del sistema obtenido al sustituir otros valores para el parámetro t.

Parámetro t	**Solución $(-3t, 2t + 2, t)$**
-1	$(3, 0, -1)$
0	$(0, 2, 0)$
3	$(-9, 8, 3)$
10	$(-30, 22, 10)$

El lector debe comprobar que estos puntos satisfagan las ecuaciones originales. Hay un número infinito de opciones para el parámetro t, de modo que el sistema tiene un infinito de soluciones.

▼ Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

Los sistemas lineales se utilizan para modelar situaciones que involucran varias cantidades variables. En el siguiente ejemplo consideramos una aplicación de sistemas lineales a las finanzas.

EJEMPLO 5 | Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

Jason recibe una herencia de \$50,000. Su asesor financiero le sugiere invertir esto en tres fondos de mutualidad: un fondo de mercado de dinero, un fondo de acciones preferenciales y un fondo de acciones de alta tecnología. El asesor estima que el fondo de mercado de dinero rendirá 5% en el año siguiente, el fondo de acciones preferenciales dará 9% y el fondo de alta tecnología rendirá 16%. Jason desea tener un rendimiento total de \$4000 el primer año. Para evitar riesgo excesivo, decide invertir el triple en el fondo de mercado de dinero que en el fondo de acciones de alta tecnología. ¿Cuánto debe invertir en cada fondo?

SOLUCIÓN

Sea x = cantidad invertida en el fondo de mercado de dinero
y = cantidad invertida en el fondo de acciones preferenciales
z = cantidad invertida en el fondo de acciones de alta tecnología

Convertimos en ecuación cada uno de los datos dados en el problema.

$$x + y + z = 50{,}000 \qquad \text{La cantidad total invertida es \$50,000}$$
$$0.05x + 0.09y + 0.16z = 4000 \qquad \text{El rendimiento total sobre la inversión es \$4000}$$
$$x = 3z \qquad \text{La cantidad en el mercado de dinero es } 3 \times \text{ cantidad en acciones de alta tecnología}$$

Multiplicando por 100 la segunda ecuación y reescribiendo la tercera tendremos el siguiente sistema, que resolvemos usando eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 50{,}000 \\ 5x + 9y + 16z = 400{,}000 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \\ 100 \times \text{Ecuación 2} \\ \text{Reste } 3z \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 50{,}000 \\ 4y + 11z = 150{,}000 \\ -y - 4z = -50{,}000 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \\ \text{Ecuación 2} + (-5) \times \text{Ecuación 1} = \text{nueva Ecuación 2} \\ \text{Ecuación 3} + (-1) \times \text{Ecuación 1} = \text{nueva Ecuación 3} \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 50{,}000 \\ -5z = -50{,}000 \\ -y - 4z = -50{,}000 \end{cases} \qquad \text{Ecuación 2} + 4 \times \text{Ecuación 3} = \text{nueva Ecuación 3}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 50{,}000 \\ z = 10{,}000 \\ y + 4z = 50{,}000 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \\ \left(-\frac{1}{5}\right) \times \text{Ecuación 2} \\ (-1) \times \text{Ecuación 3} \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 50{,}000 \\ y + 4z = 50{,}000 \\ z = 10{,}000 \end{cases} \qquad \text{Intercambie Ecuaciones 2 y 3}$$

Ahora que el sistema está en forma triangular, usamos sustitución para hallar que $x = 30{,}000$, $y = 10{,}000$ y $z = 10{,}000$. Esto significa que Jason debe invertir

$30,000 en el fondo de mercado de dinero

$10,000 en el fondo de acciones preferenciales

$10,000 en el fondo de acciones de alta tecnología

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

10.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1-2 ■ Estos ejercicios se refieren al sistema siguiente.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

1. Si sumamos dos veces la primera ecuación a la segunda ecuación, esta última se convierte en ___________ = ____.

2. Para eliminar x de la tercera ecuación, sumamos _______ veces la primera ecuación a la tercera ecuación. La tercera ecuación se convierte en ___________ = ____.

HABILIDADES

3-6 ■ Diga si la ecuación o sistema de ecuaciones es lineal.

3. $6x - \sqrt{3}y + \frac{1}{2}z = 0$

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

5. $\begin{cases} xy - 3y + z = 5 \\ x - y^2 + 5z = 0 \\ 2x + yz = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2x + 5y = 2 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$

7-12 ■ Use sustitución para resolver el sistema triangular.

7. $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ y + 2z = 7 \\ z = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y - 3z = 8 \\ y - 3z = 5 \\ z = -1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -y + 3z = 9 \\ 2z = 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2y - z = 2 \\ 3z = 12 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x - y + 6z = 5 \\ y + 4z = 0 \\ -2z = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x + 3z = 10 \\ 2y - z = -6 \\ \frac{1}{2}z = 4 \end{cases}$

13-16 ■ Ejecute una operación en el sistema dado que elimine la variable indicada. Escriba el nuevo sistema equivalente.

13. $\begin{cases} x - 2y - z = 4 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

Elimine el término en x de la segunda ecuación

14. $\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ -2x + 3y + z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

Elimine el término en x de la segunda ecuación

15. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ -4x + 5y + z = 10 \end{cases}$

Elimine el término en x de la tercera ecuación

16. $\begin{cases} x - 4y + z = 3 \\ y - 3z = 10 \\ 3y - 8z = 24 \end{cases}$

Elimine el término en y de la segunda ecuación

17-36 ■ Encuentre la solución completa del sistema lineal, o demuestre que es inconsistente.

17. $\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2y + z = -1 \\ -x + y - 2z = 5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 2z = -2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 3z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - 4z = 1 \\ 2x - y - 6z = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 5z = 8 \\ 2x - y - 2z = -7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x + y - z = -8 \\ -x + y + z = 3 \\ -2x + 4z = 18 \end{cases}$

25. $\begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x + 3y = 2 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2y + z = 3 \\ 5x + 4y + 3z = -1 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \\ 3x + 6y - 3z = 4 \end{cases}$

28. $\begin{cases} -x + 2y + 5z = 4 \\ x - 2z = 0 \\ 4x - 2y - 11z = 2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x - 3y - 7z = 5 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 5y + 6z = 7 \\ 2x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 4z = 4 \\ 4x + 6y = 4 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x + z + 2w = 6 \\ y - 2z = -3 \\ x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + 3z - 2w = 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + 2z + 2w = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 2 \end{cases}$

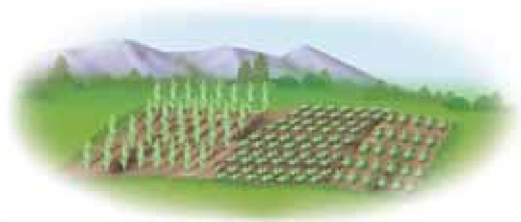
APLICACIONES

37-38 ■ **Finanzas** Una inversionista tiene \$100,000 para invertir en tres tipos de bonos: a corto plazo, plazo intermedio y largo plazo. ¿Cuánto debe ella invertir en cada tipo para satisfacer las condiciones dadas?

37. Los bonos a corto plazo pagan 4% anualmente, los bonos a plazo intermedio pagan 5% y los bonos a largo plazo pagan 6%. La inversionista desea realizar un ingreso anual total de 5.1%, con iguales cantidades invertidas en bonos de corto y mediano plazos.

38. Los bonos a corto plazo pagan 4% anualmente, los de mediano plazo pagan 6% y los de largo plazo pagan 8%. La inversionista desea tener un rendimiento anual total de \$6700 sobre su inversión, con cantidades iguales invertidas en bonos a plazos intermedio y largo.

39. **Agricultura** Un agricultor tiene 1200 acres de tierras en las que produce maíz, trigo y frijol de soya. Cuesta \$45 por acre producir maíz, \$60 producir trigo y \$50 producir frijol de soya. Debido a la demanda del mercado, el agricultor producirá el doble de acres de trigo que de maíz. Ha asignado \$63,750 para el costo de producir sus cosechas. ¿Cuántos acres de cada cultivo debe plantar?



40. Gasolinera Una gasolinera vende tres tipos de gasolina: regular en $3.00 el galón, Performance Plus en $3.20 el galón y Premium en $3.30 el galón. En un día particular se vendieron 6500 galones de gasolina para un total de $20,050. Se vendieron tres veces más galones de gasolina Regular que de Premium. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron ese día?

41. Nutrición Una bióloga está realizando un experimento sobre los efectos de varias combinaciones de vitaminas; desea darle a cada uno de sus conejos de laboratorio una dieta que contiene exactamente 9 mg de niacina y 32 mg de riboflavina. Ella tiene tres tipos diferentes de pastillas cuyo contenido de vitaminas (por onza) se da en la tabla siguiente. ¿Cuántas onzas de cada tipo de alimento debe administrarse diariamente a cada conejo para satisfacer los requisitos del experimento?

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Niacina (mg)	2	3	1
Tiamina (mg)	3	1	3
Riboflavina (mg)	8	5	7

42. Programa de dieta Nicole inició una nueva dieta que requiere el consumo de 460 calorías en cada comida, 6 gramos de fibra y 11 gramos de grasas. La tabla siguiente muestra el contenido de fibra, grasas y calorías de una porción de cada uno de tres alimentos en el desayuno. ¿Cuántas porciones de cada alimento debe tomar Nicole para seguir su dieta?

Alimento	Fibra	Grasa	Calorías
Tostada	2	1	100
Requesón	0	5	120
Fruta	2	0	60

43. Mezclas de jugos La Juice Company ofrece tres clases de bebidas de frutas: Mango Medianoche, Torrente Tropical y Poder de Piña. Cada una contiene las cantidades de jugos que se ven en la tabla siguiente.

Bebida de frutas	Jugo de mango (oz)	Jugo de piña (oz)	Jugo de naranja (oz)
Mango Medianoche	8	3	3
Torrente Tropical	6	5	3
Poder de Piña	2	8	4

En un día particular, la Juice Company utilizó 820 oz (onzas) de jugo de mango, 690 oz de jugo de piña y 450 oz de jugo de naranja. ¿Cuántas bebidas de cada clase se vendieron ese día?

44. Manufactura de aparatos electrodomésticos Kitchen Korner produce refrigeradores, lavadoras de loza y estufas en tres fábricas diferentes. La tabla siguiente da el número de cada producto producido en cada fábrica por día. Kitchen Korner recibe un pedido por 110 refrigeradores, 150 lavadoras de loza y 114 estufas. ¿Cuántos días debe programarse cada una de las plantas para satisfacer este pedido?

Aparato	Fábrica A	Fábrica B	Fábrica C
Refrigeradores	8	10	14
Lavadoras de loza	16	12	10
Estufas	10	18	6

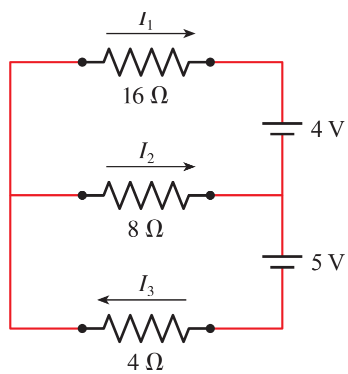
45. Portafolio de acciones Un inversionista posee tres acciones: A, B y C. Los precios de las acciones al cierre de tres días sucesivos de operaciones de compraventa se dan en la tabla siguiente.

	Acción A	Acción B	Acción C
Lunes	$10	$25	$29
Martes	$12	$20	$32
Miércoles	$16	$15	$32

A pesar de la volatilidad en los precios de acciones, el valor total de las acciones del inversionista permaneció sin cambio en $74,000 al final de cada uno de estos tres días. ¿Cuántas porciones de cada acción posee ahora el inversionista?

46. Electricidad Mediante el uso de las Leyes de Kirchhoff, se puede demostrar que las corrientes I_1, I_2 e I_3 que pasan por las tres ramas del circuito de la figura satisfacen el sistema lineal dado. Resuelva el sistema para hallar I_1, I_2 e I_3.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 16I_1 - 8I_2 = 4 \\ 8I_2 + 4I_3 = 5 \end{cases}$$



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

47. ¿Un sistema lineal puede tener exactamente dos soluciones?

(a) Suponga que (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) son soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Demuestre que $\left(\dfrac{x_0 + x_1}{2}, \dfrac{y_0 + y_1}{2}, \dfrac{z_0 + z_1}{2}\right)$ es también una solución.

(b) Use el resultado del inciso (a) para demostrar que si el sistema tiene dos soluciones diferentes, entonces tiene un número infinito de soluciones.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Mejor ajuste contra ajuste exacto**

En este proyecto usamos sistemas lineales para hallar funciones cuadráticas cuyas gráficas pasan por un conjunto de puntos dados. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

10.3 MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Matrices ▶ La matriz aumentada de un sistema lineal ▶ Operaciones elementales de renglones ▶ Eliminación de Gauss ▶ Eliminación de Gauss-Jordan ▶ Sistemas inconsistentes y consistentes indeterminados ▶ Modelado con sistemas lineales

Una *matriz* es simplemente un conjunto rectangular de números. Las matrices* se usan para organizar información en categorías que corresponden a los renglones y columnas de la matriz. Por ejemplo, un científico podría organizar información sobre una población de ballenas en peligro como sigue:

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc}\textbf{Inmaduras} & \textbf{Juveniles} & \textbf{Adultas}\end{array} \\ \begin{array}{r}\textbf{Machos} \\ \textbf{Hembras}\end{array} & \begin{bmatrix} 12 & 52 & 18 \\ 15 & 42 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ésta es una forma compacta de decir que hay 12 machos inmaduros, 15 hembras inmaduras, 18 machos adultos, etcétera.

En esta sección representamos un sistema lineal por medio de una matriz, llamada *matriz aumentada* del sistema:

Sistema lineal **Matriz aumentada**

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \end{array}$$

La matriz aumentada contiene la misma información que el sistema, pero en una forma más sencilla. Las operaciones que aprendimos para solucionar sistemas de ecuaciones se pueden realizar ahora en la matriz aumentada.

▼ Matrices

Empezamos por definir los diversos elementos que conforman una matriz.

DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una **matriz** de $m \times n$ es un conjunto rectangular de números con m **renglones** y n **columnas**.

$$\underbrace{\left.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\right\}}_{n \text{ columnas}} m \text{ renglones}$$

Decimos que la matriz tiene **dimensión** $m \times n$. Los números a_{ij} son las **entradas** de la matriz. El subíndice de la entrada a_{ij} indica que está en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

*El plural de *matriz* es *matrices*.

Veamos a continuación algunos ejemplos de matrices.

Matriz	Dimensión	
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$	2×3	2 renglones por 3 columnas
$\begin{bmatrix} 6 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1×4	1 renglón por 4 columnas

La matriz aumentada de un sistema lineal

Podemos escribir un sistema de ecuaciones lineales como una matriz, llamada la **matriz aumentada** del sistema, al escribir sólo los coeficientes y constantes que aparecen en las ecuaciones. Aquí un ejemplo.

Sistema lineal	Matriz aumentada
$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ x + 3y - z = 0 \\ -x + 4z = 11 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

Observe que una variable faltante en una ecuación corresponde a una entrada 0 en la matriz aumentada.

EJEMPLO 1 | Hallar la matriz aumentada de un sistema lineal

Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 6x - 2y - z = 4 \\ x + 3z = 1 \\ 7y + z = 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Primero escribimos el sistema lineal con las variables alineadas en columnas.

$$\begin{cases} 6x - 2y - z = 4 \\ x + 3z = 1 \\ 7y + z = 5 \end{cases}$$

La matriz aumentada es la matriz cuyas entradas son los coeficientes y las constantes en este sistema.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **2** ■

Operaciones elementales de renglones

Las operaciones que utilizamos en la Sección 10.2 para resolver sistemas lineales corresponden a operaciones en los renglones de la matriz aumentada del sistema. Por ejemplo, sumar un múltiplo de una ecuación a otro corresponde a sumar un múltiplo de un renglón a otro.

OPERACIONES ELEMENTALES DE RENGLONES

1. Sumar un múltiplo de un renglón a otro.
2. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.
3. Intercambiar dos renglones.

Observe que realizar cualquiera de estas operaciones en la matriz aumentada de un sistema no cambia su solución. Usamos la siguiente notación para describir las operaciones elementales de renglones:

Símbolo	Descripción
$R_i + kR_j \rightarrow R_i$	Cambia el i-ésimo renglón al sumar k veces el renglón j a él, y luego regresa el resultado al renglón i.
kR_i	Multiplica el i-ésimo renglón por k.
$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambia los renglones i-ésimo y j-ésimo.

En el siguiente ejemplo comparamos las dos formas de escribir sistemas de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 2 | Uso de operaciones elementales de renglones para resolver un sistema lineal

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Nuestro objetivo es eliminar el término en x de la segunda ecuación y los términos en x y y de la tercera ecuación. Por comparación, escribimos el sistema de ecuaciones y su matriz aumentada.

Sistema | **Matriz aumentada**

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 10 \\ 3 & -1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Sume $(-1) \times$ Ecuación 1 a Ecuación 2.
Sume $(-3) \times$ Ecuación 1 a Ecuación 3.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 3y - 5z = 6 \\ 2y - 4z = 2 \end{cases} \qquad \xrightarrow[R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplique Ecuación 3 por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 3y - 5z = 6 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sume $(-3) \times$ Ecuación 3 a Ecuación 2 (para eliminar y de la Ecuación 2).

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \xrightarrow{R_2 - 3R_3 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Intercambie Ecuaciones 2 y 3

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 2z = 1 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A continuación usamos sustitución para hallar que $x = 2$, $y = 7$ y $z = 3$. La solución es $(2, 7, 3)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19** ■

Eliminación de Gauss

En general, para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando su matriz aumentada, usamos operaciones elementales de renglones para llegar a una matriz de cierta forma. Esta forma se describe en el recuadro siguiente.

FORMA ESCALONADA POR RENGLONES Y FORMA ESCALONADA POR RENGLONES REDUCIDA DE UNA MATRIZ

Una matriz está en forma **escalonada por renglones** si satisface las siguientes condiciones.

1. El primer número diferente de cero de cada renglón (leyendo de izquierda a derecha) es 1. Éste se llama **entrada inicial**.
2. La entrada inicial de cada renglón está a la derecha de la entrada inicial del renglón situado inmediatamente arriba de él.
3. Todos los renglones formados enteramente de ceros están en la parte inferior de la matriz.

Una matriz está en **forma escalonada por renglones reducida** si está en la forma escalonada por renglones y también satisface la siguiente condición.

4. Todo número arriba y debajo de cada entrada inicial es un 0.

En las siguientes matrices, la primera no está en forma escalonada por renglones. La segunda *está* en forma escalonada por renglones y la tercera está en forma escalonada por renglones reducida. Los elementos en rojo son los elementos iniciales.

No en forma escalonada por renglones

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 iniciales *no se* cambian a la derecha en renglones sucesivos

Forma escalonada por renglones

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 iniciales se cambian a la derecha en renglones sucesivos

Forma escalonada por renglones reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 iniciales tienen números 0 arriba y abajo de ellos

A continuación veamos una forma sistemática de poner una matriz en forma escalonada por renglones usando operaciones elementales de renglones:

- Empiece por obtener 1 en la esquina superior izquierda. A continuación obtenga ceros abajo del 1 al sumar múltiplos apropiados del primer renglón a los renglones debajo de él.
- A continuación, obtenga un 1 inicial en el siguiente renglón, y luego obtenga ceros debajo de ese 1.
- En cada etapa asegúrese que toda entrada inicial está a la derecha de la entrada inicial en el renglón arriba de él; reacomode los renglones si es necesario.
- Continúe este proceso hasta que llegue a una matriz en forma escalonada por renglones.

Ésta es la forma en que el proceso puede trabajar para una matriz de 3×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Una vez que una matriz aumentada esté en forma escalonada por renglones, podemos resolver el sistema lineal correspondiente usando sustitución. Esta técnica se llama **eliminación gaussiana**, en honor a su inventor, el matemático alemán C. F. Gauss (vea página 272).

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA USANDO ELIMINACIÓN GAUSSIANA

1. **Matriz aumentada.** Escriba la matriz aumentada del sistema.
2. **Forma escalonada por renglones.** Use operaciones elementales de renglón para cambiar la matriz aumentada a forma escalonada por renglones.
3. **Sustitución.** Escribimos el nuevo sistema de ecuaciones que corresponde a la forma escalonada por renglones de la matriz aumentada y resolvemos por medio de sustitución.

EJEMPLO 3 | Solución de un sistema usando forma escalonada por renglones

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales usando eliminación gaussiana.

$$\begin{cases} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = -11 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Primero escribimos la matriz aumentada del sistema y luego usamos operaciones elementales de renglones para ponerla en forma escalonada por renglones.

Necesita un 1 aquí

Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{rrrr} 4 & 8 & -4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_1} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{array}\right]$$

Necesita ceros aquí

$$\xrightarrow[R_3 + 2R_1 \to R_3]{R_2 - 3R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{array}\right]$$

Necesita un 1 aquí

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{array}\right]$$

Necesita un cero aquí

$$\xrightarrow{R_3 - 5R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{array}\right]$$

Necesita un 1 aquí

Forma escalonada por renglones:

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}R_3} \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Ahora tenemos una matriz equivalente en forma escalonada por renglones, y el correspondiente sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + 4z = -7 \\ z = -2 \end{cases}$$

Sustitución: Usamos sustitución para resolver el sistema.

$y + 2(-2) = -3$ Sustituimos $z = -2$ en la Ecuación 2

$y = 1$ Despejamos y

$x + 2(1) - (-2) = 1$ Sustituimos $y = 1$ y $z = -2$ en la Ecuación 1

$x = -3$ Despejamos x

Entonces la solución del sistema es $(-3, 1, -2)$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

```
ref([A])
   [[1 2 -1  1]
    [0 1  2 -3]
    [0 0  1 -2]]
```

FIGURA 1

Las calculadoras graficadoras tienen un comando “row-echelon form” (forma escalonada por renglones) que pone una matriz en forma escalonada por renglones. (En la TI-83 este comando es `ref`.) Para la matriz aumentada del Ejemplo 3 el comando `ref` da la salida que se muestra en la Figura 1. Nótese que la forma escalonada por renglones que se obtiene con la calculadora difiere de la que obtuvimos en el Ejemplo 3. Esto es porque la calculadora emplea diferentes operaciones de renglones que las que usamos nosotros. El lector debe verificar que la forma escalonada por renglones de su calculadora lleve a la misma solución que la nuestra.

▼ Eliminación de Gauss-Jordan

Si ponemos la matriz aumentada de un sistema lineal en forma escalonada por renglones *reducida*, entonces no necesitamos sustitución para resolver el sistema. Para poner una matriz en forma escalonada por renglones *reducida*, usamos los pasos siguientes:

- Use operaciones elementales de renglón para poner la matriz en forma escalonada por renglones.
- Obtenga ceros arriba de cada entrada inicial al sumar múltiplos del renglón que contenga esa entrada a los renglones arriba de él. Empiece con la útima entrada inicial y trabaje hacia arriba.

Veamos a continuación cómo funciona el proceso para una matriz de 3×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

El uso de la forma escalonada por renglones reducida para resolver un sistema se llama **eliminación de Gauss-Jordan**. El proceso se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 | Solución de un sistema usando forma escalonada por renglones reducida

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales, usando eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = -11 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{cases}$$

SOLUCIÓN En el Ejemplo 3 usamos eliminación de Gauss en la matriz aumentada de este sistema, para llegar a una matriz equivalente en forma escalonada por renglones. Continuamos usando operaciones elementales de renglón en la última matriz del Ejemplo 3 para llegar a una matriz equivalente en forma escalonada por renglones reducida.

Necesita ceros aquí

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Necesita un cero aquí

$$\xrightarrow[R_1 + R_3 \rightarrow R_1]{R_2 - 4R_3 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos una matriz equivalente en forma escalonada por renglones reducida, y el correspondiente sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Como el sistema está en forma escalonada por renglones reducida, no se requiere sustitución para llegar a la solución.

En consecuencia, de inmediato llegamos a la solución $(-3, 1, -2)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23** ■

```
rref([A])
    [[1 0 0 -3]
     [0 1 0 1 ]
     [0 0 1 -2]]
```

FIGURA 2

Las calculadoras graficadoras también tienen un comando que pone una matriz en forma escalonada por renglones reducida. (En la TI-83 este comando es `rref`.) Para la matriz aumentada del Ejemplo 4, el comando `rref` da la salida que se ve en la Figura 2. La calculadora da la misma forma escalonada por renglones reducida como la que obtuvimos en el Ejemplo 4. Esto es porque toda matriz tiene una *única* forma escalonada por renglones reducida.

▼ Sistemas inconsistentes y consistentes indeterminados

Los sistemas de ecuaciones lineales que consideramos en los Ejemplos 1-4 tenían exactamente una solución pero, como sabemos de la Sección 10.2, un sistema lineal puede tener una solución, ninguna solución o un infinito de soluciones. Por fortuna, la forma escalonada por renglones de un sistema nos permite determinar cuál de estos casos aplica, como se describe en el cuadro siguiente.

Primero necesitamos alguna terminología. Una **incógnita inicial** en un sistema lineal es aquella que corresponde a una entrada inicial en la forma escalonada por renglones de la matriz aumentada del sistema.

SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL EN FORMA ESCALONADA POR RENGLONES

Suponga que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido transformada por eliminación de Gauss a la forma escalonada por renglones. Entonces, exactamente uno de lo siguiente es verdadero.

1. **No hay solución.** Si la forma escalonada por renglones contiene un renglón que representa la ecuación $0 = c$, donde c es un número diferente de cero, entonces el sistema no tiene solución. Un sistema que no tiene solución se denomina **inconsistente**.
2. **Una solución.** Si cada una de las incógnitas en la forma escalonada por renglones es una incógnita inicial, entonces el sistema tiene exactamente una solución que encontramos usando sustitución o eliminación de Gauss-Jordan.
3. **Un infinito de soluciones.** Si las incógnitas en la forma escalonada por renglones no son todas ellas incógnitas iniciales y si el sistema no es inconsistente, entonces tiene un número infinito de las soluciones. En este caso el sistemase conoce como **consistente indeterminado**. Resolvemos el sistema al poner la matriz en forma escalonada por renglones reducida y luego expresar las incógnitas iniciales en términos de las incógnitas no iniciales. Las variables no iniciales pueden tomar cualesquier números reales como sus valores.

Las matrices siguientes, todas en forma escalonada por renglones, ilustran los tres casos descritos en el cuadro.

No hay solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Última ecuación dice 0 = 1

Una solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Cada incógnita es una incógnita inicial

Número infinito de soluciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

z no es incógnita inicial

EJEMPLO 5 | Un sistema donde no hay solución

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 12 \\ 2x - 5y + 5z = 14 \\ x - 2y + 3z = 20 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Transformamos el sistema en forma escalonada por renglones.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 5 & 14 \\ 1 & -2 & 3 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{18}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz está en forma escalonada por renglones, de modo que podemos detener el proceso de eliminación de Gauss. Ahora, si convertimos el último renglón en forma de ecuación, obtenemos $0x + 0y + 0z = 1$, o $0 = 1$, lo cual es falso. No importa qué valores escojamos para x, y y z, la última ecuación nunca será un enunciado verdadero. Esto significa que el sistema *no tiene solución*.

```
ref([A])
[[1  -2.5  2.5  7   ]
 [0  1     1    -10]
 [0  0     0    1   ]]
```

FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

La Figura 3 muestra la forma escalonada por renglones producida por una calculadora TI-83 para la matriz aumentada del Ejemplo 5. El lector debe comprobar que ésta dé la misma solución.

EJEMPLO 6 | Un sistema con un infinito de soluciones

Encuentre la solución completa del sistema.

$$\begin{cases} -3x - 5y + 36z = 10 \\ -x \qquad\quad + 7z = 5 \\ x + y - 10z = -4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Transformamos el sistema en forma escalonada por renglones reducida.

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 + 3R_1 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada por renglones reducida en la calculadora TI-83.

```
rref([A])
   [[1 0 -7 -5]
    [0 1 -3 1 ]
    [0 0 0  0 ]]
```

El tercer renglón corresponde a la ecuación $0 = 0$. Esta ecuación es siempre verdadera, no importa cuáles valores se usen para x, y o z. Como la ecuación no agrega más información nueva acerca de las incógnitas, podemos eliminarla del sistema. En consecuencia, la última matriz corresponde al sistema

$$\begin{cases} x \qquad - 7z = -5 \\ \qquad y - 3z = 1 \end{cases}$$

Ecuación 1
Ecuación 2

Incógnitas iniciales

A continuación despejamos las incógnitas iniciales x y y en términos de la incógnita no inicial z:

$x = 7z - 5$ Despeje x en la Ecuación 1

$y = 3z + 1$ Despeje y en la Ecuación 2

Para obtener la solución completa, con t representamos cualquier número real y expresamos x, y y z en términos de t:

$$x = 7t - 5$$
$$y = 3t + 1$$
$$z = t$$

También podemos escribir la solución como la terna ordenada $(7t - 5, 3t + 1, t)$, donde t es cualquier número real.

AHORA INNTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

En el Ejemplo 6, para obtener soluciones específicas, damos un valor específico a t. Por ejemplo, si $t = 1$, entonces

$$x = 7(1) - 5 = 2$$
$$y = 3(1) + 1 = 4$$
$$z = 1$$

A continuación veamos algunas otras soluciones del sistema obtenidas sustituyendo otros valores para el parámetro t.

Parámetro t	**Solución $(7t - 5, 3t + 1, t)$**
-1	$(-12, -2, -1)$
0	$(-5, 1, 0)$
2	$(9, 7, 2)$
5	$(30, 16, 5)$

EJEMPLO 7 | Un sistema con un infinito de soluciones

Encuentre la solución completa del sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 4w = 10 \\ x + 3y - 3z - 4w = 15 \\ 2x + 2y - 6z - 8w = 10 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Transformamos el sistema en forma escalonada por renglones reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & -4 & 15 \\ 2 & 2 & -6 & -8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto está en forma escalonada por renglones reducida. Como el último renglón representa la ecuación $0 = 0$, podemos eliminarlo. En consecuencia, la última matriz corresponde al sistema

$$\begin{cases} x \qquad - 3z - 4w = 0 \\ \quad y \qquad\qquad\quad = 5 \end{cases}$$

Incógnitas iniciales

Para obtener la solución completa, despejamos las incógnitas iniciales x y y en términos de las incógnitas no iniciales z y w, y hacemos z y w que sean cualesquier números reales. Entonces la solución completa es

$$x = 3s + 4t$$
$$y = 5$$
$$z = s$$
$$w = t$$

donde s y t son cualesquier números reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

Observe que s y t *no tienen* que ser *el mismo* número real en la solución para el Ejemplo 7. Podemos escoger valores arbitrarios para cada una si deseamos construir una solución específica para el sistema. Por ejemplo, si hacemos $s = 1$ y $t = 2$, entonces obtenemos la solución $(11, 5, 1, 2)$. Es necesario verificar que esto satisfaga realmente las tres ecuaciones originales del Ejemplo 7.

Los Ejemplos 6 y 7 ilustran este dato general: si un sistema en forma escalonada por renglones tiene n ecuaciones diferentes de cero en m incógnitas $(m > n)$, entonces la solución completa tendrá $m - n$ incógnitas no iniciales. Por ejemplo, en el Ejemplo 6 llegamos a *dos* ecuaciones diferentes de cero con las *tres* incógnitas x, y y z, que da $3 - 2 = 1$ incógnita no inicial.

▼ Modelado con sistemas lineales

Las ecuaciones lineales, a veces conteniendo cientos o hasta miles de incógnitas, se presentan con frecuencia en las aplicaciones de álgebra para ciencias y otros campos. Por ahora, consideremos un ejemplo que contiene sólo tres incógnitas.

EJEMPLO 8 | Análisis nutricional usando un sistema de ecuaciones lineales

Un nutriólogo está realizando un experimento en estudiantes voluntarios. Él desea alimentar a uno de sus sujetos con una dieta diaria de una combinación de tres alimentos comerciales de dieta: MiniCal, LiquiFast y SlimQuick. Para el experimento, es importante que el sujeto consuma exactamente 500 mg de potasio, 75 g de proteína y 1150 unidades de vitamina D cada día. Las cantidades de estos nutrientes en una onza de cada alimento se dan en la tabla siguiente. ¿Cuántas onzas de cada alimento debe consumir el sujeto cada día para satisfacer exactamente las necesidades de nutrientes?

	MiniCal	LiquiFast	SlimQuick
Potasio (mg)	50	75	10
Proteína (g)	5	10	3
Vitamina D (unidades)	90	100	50

SOLUCIÓN Represente con x, y y z el número de onzas de MiniCal, LiquiFast y SlimQuick, respectivamente, que el sujeto debe comer cada día. Esto significa que obtendrá $50x$ mg de potasio del Minical, $75y$ mg del LiquiFast y $10z$ mg del SlimQuick, para un total de $50x + 75y + 10z$ mg de potasio en todos. Como las necesidades de potasio son de 500 mg, obtenemos la primera ecuación siguiente. Un razonamiento similar para las necesidades de proteína y vitamina D lleva al sistema

$$\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 & \text{Potasio} \\ 5x + 10y + 3z = 75 & \text{Proteína} \\ 90x + 100y + 50z = 1150 & \text{Vitamina D} \end{cases}$$

```
rref([A])
   [[1 0 0 5 ]
    [0 1 0 2 ]
    [0 0 1 10]]
```

FIGURA 4

Dividiendo la primera ecuación entre 5 y la tercera entre 10 da el sistema

$$\begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema usando eliminación de Gauss, o podemos usar una calculadora graficadora para hallar la forma escalonada por renglones reducida de la matriz aumentada del sistema. Usando el comando `rref` en la TI-83, obtenemos la salida de la Figura 4. De la forma escalonada por renglones reducida vemos que $x = 5$, $y = 2$, $z = 10$. Al sujeto deben administrársele 5 oz de MiniCal, 2 oz de LiquiFast y 10 oz de SlimQuick todos los días.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 5, y = 2, z = 10$:

$$\begin{cases} 10(5) + 15(2) + 2(10) = 100 \\ 5(5) + 10(2) + 3(10) = 75 \\ 9(5) + 10(2) + 5(10) = 115 \end{cases} \checkmark$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

Una aplicación más práctica podría involucrar docenas de alimentos y nutrientes en lugar de sólo tres. Tales problemas llevan a sistemas con grandes números de incógnitas y ecuaciones. Calculadoras graficadoras y computadoras son esenciales para resolver sistemas tan grandes.

10.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene un número infinito de soluciones, entonces el sistema se denomina ________. Si un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, entonces el sistema se denomina _________.

2. Escriba la matriz aumentada del siguiente sistema de ecuaciones.

Sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x \qquad + 2z = -3 \\ \quad 2y - z = 3 \end{cases}$$

Matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$$

3. La siguiente matriz es la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales con las variables x, y y z. (Se da en forma escalonada por renglones reducida.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Las incógnitas iniciales son_______.

(b) ¿El sistema es inconsistente o consistente indeterminado?___

(c) La solución del sistemas es: $x =$ ____, $y =$ ____, $z =$____

4. La matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales está dada en forma escalonada por renglones reducida. Encuentre la solución del sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(a) $x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____

(b) $x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____

(c) $x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____

HABILIDADES

5-10 ■ Exprese la dimensión de la matriz.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 3 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 12 \\ 35 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

11-18 ■ Nos dan una matriz. **(a)** Determine si la matriz está en forma escalonada por renglones. **(b)** Determine si la matriz está en forma escalonada por renglones reducida. **(c)** Escriba el sistema de ecuaciones para el cual la matriz dada es la matriz aumentada.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

19-28 ■ El sistema de ecuaciones lineales tiene una solución única. Encuentre la solución usando eliminación de Gauss o eliminación de Gauss-Jordan.

19. $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ \quad y + 2z = 5 \\ x + y + 3z = 8 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x + y + 6z = 3 \\ x + y + 3z = 3 \\ x + 2y + 4z = 7 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \\ 4x + y - 3z = 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + 2y + 3z = 17 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2y + z = 4 \\ x + y = 4 \\ 3x + 3y - z = 10 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 22 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 13 \\ -x + 2y - 5z = 6 \\ 5x - y - z = 49 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 10x + 10y - 20z = 60 \\ 15x + 20y + 30z = -25 \\ -5x + 30y - 10z = 45 \end{cases}$

29-38 ■ Determine si el sistema de ecuaciones lineales es inconsistente o consistente indeterminado. Si es consistente indeterminado, encuentre la solución completa.

29. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - 3z = 1 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + 3z = 3 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ -y + 8z = 8 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x - 3y - 9z = -5 \\ x + 3z = 2 \\ -3x + y - 4z = -3 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x - 2y + 5z = 3 \\ -2x + 6y - 11z = 1 \\ 3x - 16y - 20z = -26 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ 4x - 8y + 32z = 24 \\ 2x - 3y + 11z = 4 \end{cases}$

34. $\begin{cases} -2x + 6y - 2z = -12 \\ x - 3y + 2z = 10 \\ -x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x + 4y - 2z = -3 \\ 2x - y + 5z = 12 \\ 8x + 5y + 11z = 30 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 3r + 2s - 3t = 10 \\ r - s - t = -5 \\ r + 4s - t = 20 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x + y - 2z = 12 \\ -x - \frac{1}{2}y + z = -6 \\ 3x + \frac{3}{2}y - 3z = 18 \end{cases}$

38. $\begin{cases} y - 5z = 7 \\ 3x + 2y = 12 \\ 3x + 10z = 80 \end{cases}$

39-54 ■ Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

39. $\begin{cases} 4x - 3y + z = -8 \\ -2x + y - 3z = -4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 14 \\ 4x - y - 2z = -17 \\ -x - y + z = 3 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 9 \\ -x - 7z = 10 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$

42. $\begin{cases} -4x - y + 36z = 24 \\ x - 2y + 9z = 3 \\ -2x + y + 6z = 6 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x + 2y - 3z = -5 \\ -2x - 4y - 6z = 10 \\ 3x + 7y - 2z = -13 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -4x + 3y + z = 4 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x - y + 6z = 8 \\ x + z = 5 \\ x + 3y - 14z = -4 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 3x - y + 2z = -1 \\ 4x - 2y + z = -7 \\ -x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$

47. $\begin{cases} -x + 2y + z - 3w = 3 \\ 3x - 4y + z + w = 9 \\ -x - y + z + w = 0 \\ 2x + y + 4z - 2w = 3 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x + y - z - w = 6 \\ 2x + z - 3w = 8 \\ x - y + 4w = -10 \\ 3x + 5y - z - w = 20 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x + y + 2z - w = -2 \\ 3y + z + 2w = 2 \\ x + y + 3w = 2 \\ -3x + z + 2w = 5 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x - 3y + 2z + w = -2 \\ x - 2y - 2w = -10 \\ z + 5w = 15 \\ 3x + 2z + w = -3 \end{cases}$

51. $\begin{cases} x - y + w = 0 \\ 3x - z + 2w = 0 \\ x - 4y + z + 2w = 0 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 5 \\ -x + y + 4z - w = 3 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$

53. $\begin{cases} x + z + w = 4 \\ y - z = -4 \\ x - 2y + 3z + w = 12 \\ 2x - 2z + 5w = -1 \end{cases}$

54. $\begin{cases} y - z + 2w = 0 \\ 3x + 2y + w = 0 \\ 2x + 4w = 12 \\ -2x - 2z + 5w = 6 \end{cases}$

APLICACIONES

55. Nutrición Un médico recomienda que un paciente tome 50 mg de niacina, de riboflavina y de tiamina diariamente para aliviar una deficiencia vitamínica. En su maletín de medicinas en casa, el paciente encuentra tres marcas de píldoras de vitamina. Las cantidades de las vitaminas relevantes por píldora se dan en la tabla siguiente. ¿Cuántas píldoras de cada tipo debe tomar a diario para obtener 50 mg de cada vitamina?

	VitaMax	Vitron	VitaPlus
Niacina (mg)	5	10	15
Riboflavina (mg)	15	20	0
Tiamina (mg)	10	10	10

56. Mezclas Una química tiene tres soluciones ácidas de varias concentraciones. La primera es 10% ácida; la segunda, 20% y, la tercera, 40%. ¿Cuántos mililitros de cada una debe ella usar para hacer 100 mL de una solución al 18%, si tiene que usar cuatro veces más de la solución al 10% que de la solución al 40%?

57. Distancia, velocidad y tiempo Amanda, Bryce y Corey entran a una competencia en la que deben correr, nadar y andar en bicicleta en una ruta marcada. Sus magnitudes de velocidad promedio se dan en la tabla. Corey termina primero con un tiempo total de 1 h 45 min. Amanda llega en segundo lugar con un tiempo de 2 h 30 min. Bryce termina al último con un tiempo de 3 h. Encuentre la distancia (en millas) para cada parte de la carrera.

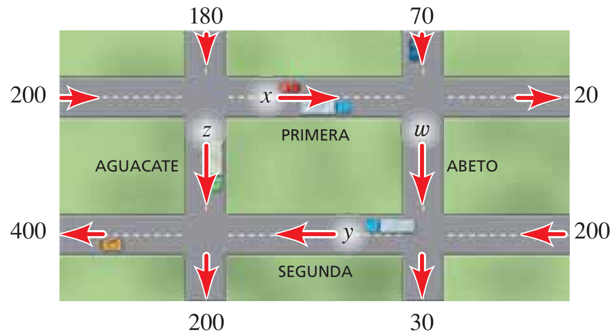
	Promedio de velocidad (mi/h)		
	Correr	Nadar	Bicicleta
Amanda	10	4	20
Bryce	$7\frac{1}{2}$	6	15
Corey	15	3	40

58. Uso de salón de clase Una pequeña escuela tiene 100 estudiantes que ocupan tres salones: A, B y C. Después del primer período del día de clase, la mitad de los estudiantes del salón A pasan al salón B, un quinto de los estudiantes del salón B pasan al salón C, y un tercio de los estudiantes del salón C pasan al salón A. No obstante, el número total de estudiantes en cada salón es igual para ambos períodos. ¿Cuántos estudiantes ocupan cada salón?

59. Manufactura de muebles Una fábrica de muebles construye mesas, sillas y armarios, todos de madera. Cada pieza de mueble requiere tres operaciones: corte de madera, ensamble y acabado. Cada operación requiere el número de horas (h) dado en la tabla siguiente. Los trabajadores de la fábrica pueden trabajar 300 horas de corte, 400 horas de ensamble y 590 horas de acabado en cada semana de trabajo. ¿Cuántas mesas, sillas y armarios deben ser producidos para que se usen todas las horas de trabajo disponibles? ¿O, es esto imposible?

	Mesa	Silla	Armario
Corte (h)	$\frac{1}{2}$	1	1
Ensamble(h)	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	1
Acabado (h)	1	$1\frac{1}{2}$	2

60. Flujo de tránsito En la figura siguiente se ve una sección de la red de calles de una ciudad. Las flechas indican calles con circulación en un sentido, con números que indican cuántos autos entran o salen de esta sección de la ciudad por la calle indicada en cierto período de una hora. Las variables x, y, z y w representan el número de autos que se mueven a lo largo de partes de las calles Primera, Segunda, Aguacate y Abeto durante este período. Encuentre x, y, z y w, suponiendo que ninguno de los autos se detenga o se estacione en ninguna de las calles mostradas.



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

61. Polinomios determinados por un conjunto de puntos Todos sabemos que dos puntos determinan de manera única una recta $y = ax + b$ en el plano de coordenadas. Del mismo modo, tres puntos determinan de manera única una función polinomial cuadrática (segundo grado)

$$y = ax^2 + bx + c$$

cuatro puntos determinan de manera única una función polinomial cúbica (tercer grado)

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y así sucesivamente. (Algunas excepciones a esta regla son si los tres puntos en realidad se encuentran sobre una recta, o los cuatro puntos están en una cuadrática o recta, etcétera.) Para el siguiente conjunto de cinco puntos, encuentre la recta que contenga los primeros dos puntos, la cuadrática que contenga los primeros tres puntos, la cúbica que contenga los primeros cuatro puntos, y la función polinomial de cuarto grado que contenga los cinco puntos.

$$(0, 0), \quad (1, 12), \quad (2, 40), \quad (3, 6), \quad (-1, -14)$$

Grafique los puntos y funciones en el mismo rectángulo de vista usando una calculadora graficadora.

10.4 EL ÁLGEBRA DE MATRICES

Igualdad de matrices ▶ Suma, resta y multiplicación por escalares de matrices ▶ Multiplicación de matrices ▶ Propiedades de multiplicación de matrices ▶ Aplicaciones de multiplicación de matrices ▶ Gráficas por computadora

Hasta este punto, hemos empleado matrices simplemente por comodidad para resolver sistemas lineales. Las matrices tienen otros muchos usos en matemáticas y ciencias y, para la mayor parte de estas aplicaciones, un conocimiento de álgebra de matrices es esencial. Al igual que los números, las matrices se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. En esta sección aprendemos a realizar estas operaciones algebraicas con matrices.

▼ Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen las mismas entradas en las mismas posiciones.