Facultad de Ingeniería
UNER

Álgebra y Cálculo

Tecnicatura universitaria en producción y explotación de datos

TUPED - 1° C

Facultad de Ingeniería UNER

Unidad 7:

Recta en el plano y en el espacio

TUPED - 1° C

Recta en el plano

Se puede determinar una recta en el plano si se conoce:

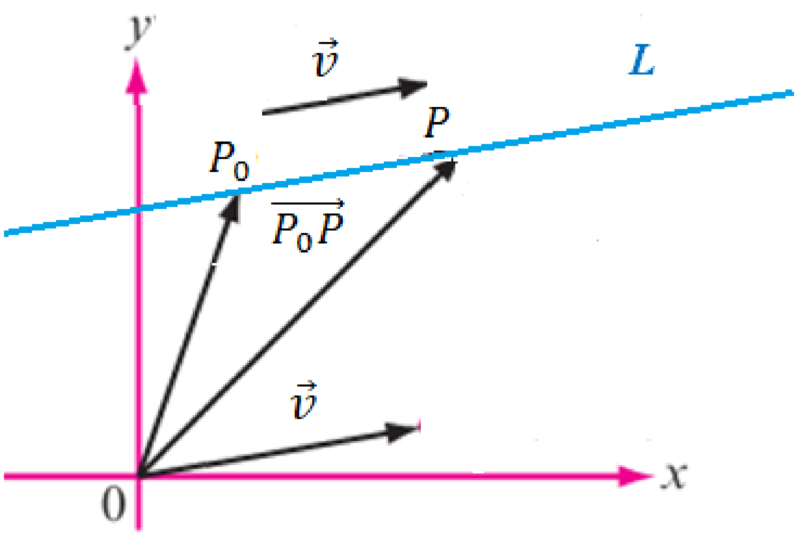
- Un **punto** $\boldsymbol{P_0(x_0, y_0)}$ perteneciente a la recta y un **vector paralelo** a ella, $\vec{\boldsymbol{v}}$.

- **Dos puntos** pertenecientes a ella, $\boldsymbol{P_0(x_0, y_0)} y\ \boldsymbol{P_1(x_1, y_1)}$.

Ecuación vectorial de una recta en el plano

Sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto perteneciente a la recta **L** y sea el **vector** $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ paralelo a la misma . Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la recta. Entonces el segmento dirigido $\overrightarrow{P_0P}$ es un vector paralelo a $\vec{v}$.

El vector $\vec{v}$ es paralelo a $\overrightarrow{P_0P}$, es decir $\overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{v}$; $t \in \mathbb{R}$



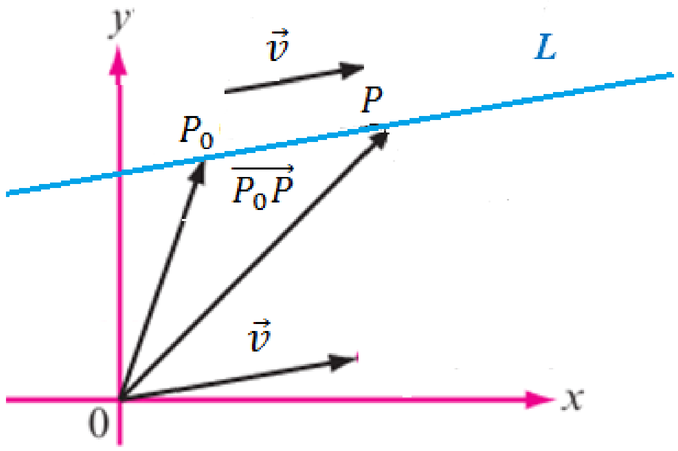
$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}}$$

$t \in \mathbb{R}$

Ecuación vectorial de la recta

Ecuaciones paramétricas de una recta en el plano



$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}}$$

Ecuación vectorial de la recta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Igualamos componente a componente:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\, v_1 \\ y = y_0 + t\, v_2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta

Recta en el plano

Ecuación vectorial de la recta

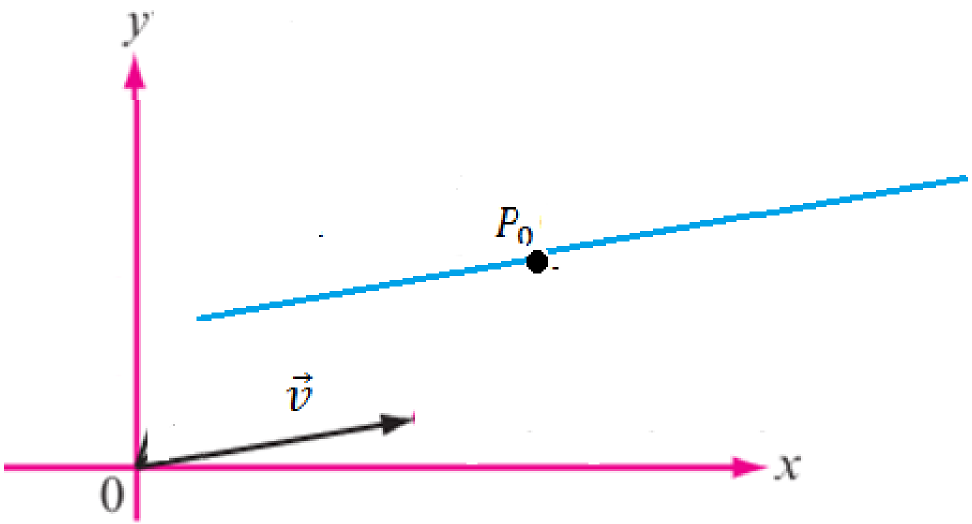
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{cases} x = x_0 + t\ v_1 \\ y = y_0 + t\ v_2 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P(5,4) y es paralela al vector $\vec{v} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

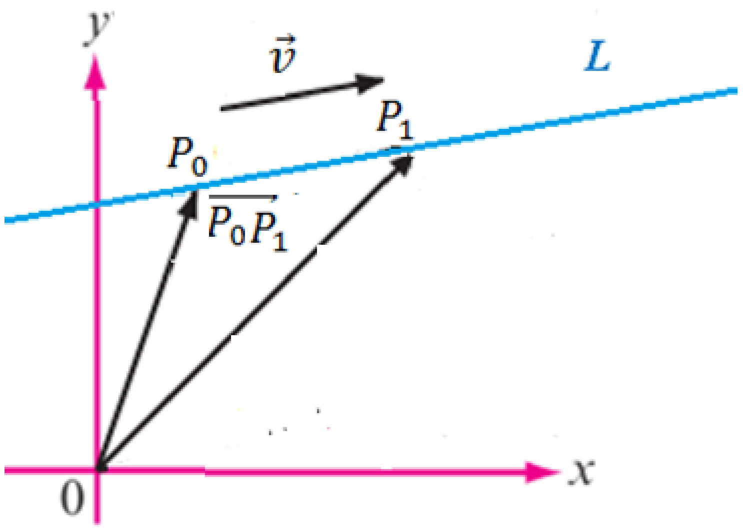


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 4 + t \end{cases};\ t \in \mathbb{R}$$

Ecuación de una recta dados dos puntos

Sea $P_0(x_0, y_0)$ $yP_1(x_1, y_1)$ dos puntos en el plano pertenecientes a la recta L. El segmento dirigido $\overrightarrow{P_0P_1}$es un vector paralelo a L.



$$\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0)\vec{\imath} + (y_1 - y_0)\vec{\jmath}$$
$$= v_1\vec{\imath} + v_1\vec{\jmath} = \vec{v}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}}$$

Ecuación vectorial de la recta

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t\,(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}}$$

Ecuaciones paramétrica de la recta

$t \in \mathbb{R}$

Recta en el plano

Ecuación vectorial de la recta

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{cases} x = x_0 + t\, v_1 \\ y = y_0 + t\, v_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1,3)$ y $P_2(1,2)$.

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = 2\vec{i} - 1\vec{j}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Recta en el plano

Sea $\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j}$ un vector paralelo a la recta L y sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto en el plano pertenecientes a L.

$$\begin{cases} x = x_0 + t\, v_1 \\ y = y_0 + t\, v_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta

Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$, *despejamos el parámetro t de cada ecuación e igualamos:*

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Ecuación simétrica de la recta

Ecuaciones de la recta en el plano

Sea $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ un vector paralelo a la recta L y sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto en el plano pertenecientes a L.

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v} \quad ; t \in \mathbb{R}}$$

Ecuación vectorial de la recta

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,v_1 \\ y = y_0 + t\,v_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétrica de la recta

Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Ecuación simétrica de la recta

Posiciones relativas entre rectas en el plano

Ejemplo 1: Sean las rectas:

$$L_1: \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-3} \qquad\qquad L_2: \begin{cases} x = \quad 1 - 4t \\ y = -5 + 6t \end{cases}$$

¿Las rectas L_1 y L_2 son paralelas?

Sean las rectas:

$$L_1: \begin{cases} x = x_1 + v_1 t \\ y = y_1 + v_2 t \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2: \begin{cases} x = x_2 + u_1 t \\ y = y_2 + u_2 t \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} \ \ paralelo\ a\ L_1\ y\ \vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}\ paralelo\ a\ L_2$$

Definición *Dos rectas en el plano son **paralelas** si y sólo si sus vectores paralelos son paralelos.*

Posiciones relativas entre rectas en el plano

Ejemplo 2: Sean las rectas:

$$L_1: \begin{cases} x = & 1 - 2t \\ y = & 3t \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2: \begin{cases} x = & 0{,}5 + 6t \\ y = & -2 + 4t \end{cases}$$

$$¿Las\ rectas\ L_1\ y\ L_2\ son\ perpendiculares?$$

Sean las rectas:

$$L_1: \begin{cases} x = x_1 + v_1 t \\ y = y_1 + v_2 t \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2: \begin{cases} x = x_2 + u_1 t \\ y = y_2 + u_2 t \end{cases}$$

$$\boldsymbol{v}\ \ paralelo\ a\ L_1\ y\ \boldsymbol{u}\ paralelo\ a\ L_2$$

Definición *Dos rectas en el plano son* ***perpendiculares*** *si y sólo si sus vectores paralelos son perpendiculares.*

Recta en el plano

Ejemplo:

Dada la recta L: $\begin{cases} x = \quad 5 - 1t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

a) Indicar donde corta al eje x.

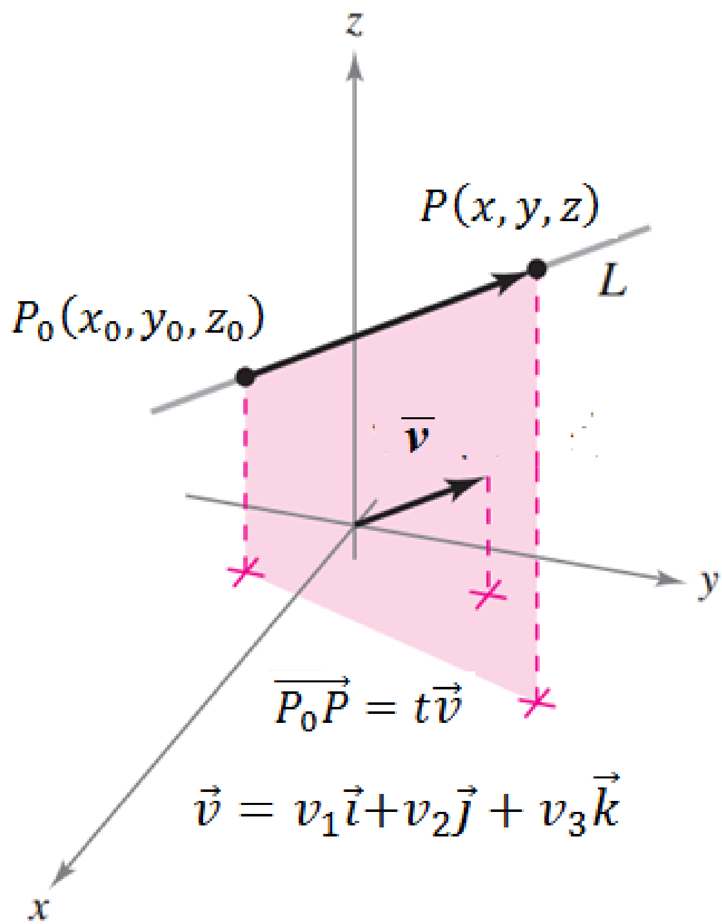
b) Determinar la ecuación de la recta paralela a L que pasa por el punto P(-1, 4).

Unidad 7:

Recta en el espacio

Recta en el espacio

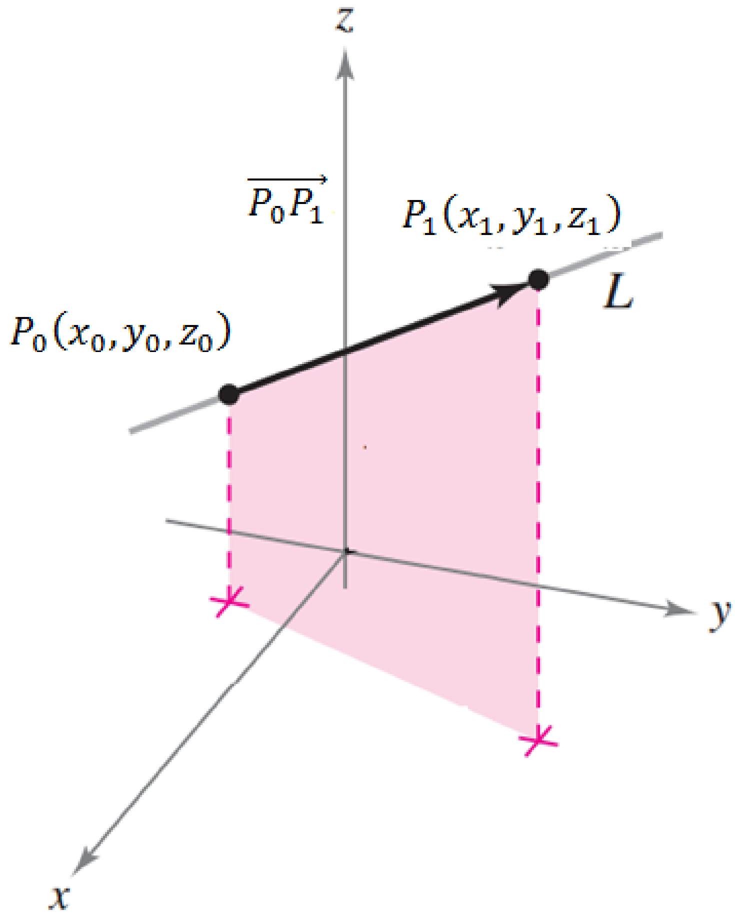
Una recta L paralela al vector $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ *y que pasa por el punto* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *se representa por medio de las* ***ecuaciones paramétricas***:



$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases} \qquad t \in R$$

Recta en el espacio

Una recta L que pasa por los puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *y* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *se representa por medio de* ***las ecuaciones paramétricas:***



$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t & t \in R \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$$

Recta en el espacio

Ecuaciones paramétricas de una recta:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases} \qquad t \in R$$

Ecuaciones simétricas de una recta: Si $v_1, v_2, v_3 \neq 0$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}}$$

¿Cuándo dos rectas en el espacio son paralelas?

Dos rectas en el espacio son ***paralelas*** si y sólo si sus vectores paralelos son paralelos.

¿Cuándo dos rectas en el espacio son perpendiculares?

Dos rectas en el espacio son ***perpendiculares*** si y sólo si sus vectores paralelos son perpendiculares y además las rectas se cortan en un punto.

Dos rectas en el espacio que no se cortan en un punto y no son paralelas, entonces son ***alabeadas.***

Dadas las rectas:

$$L_1:\begin{cases} x = x_1 + v_1 t \\ y = y_1 + v_2 t \\ z = z_1 + v_3 t \end{cases} \quad L_2:\begin{cases} x = x_2 + u_1 t \\ y = y_2 + u_2 t; \\ z = z_2 + u_3 t \end{cases} \qquad \begin{aligned} \overrightarrow{v_{L1}} &= v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \\ \overrightarrow{u_{L2}} &= u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \end{aligned}$$

- ***Rectas paralelas***

Las rectas son ***paralelas*** si y sólo los vectores paralelos son paralelos.

$$\boxed{L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{v} // \vec{u}}$$

- ***Rectas ortogonales***

Las rectas son ***ortogonales*** si y sólo si los vectores paralelos son ortogonales y se cortan en un punto.

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \text{ y se cortan en un punto.}}$$

Recta en el espacio

Halla la ecuación paramétrica y simétrica de las siguientes rectas

a) Pasa por el punto (-1,1,2) y es paralela al vector $\vec{v} = (3, 2, \ -1)$
b) Pasa por el punto origen y es paralela al vector $\vec{v} = (1, 1, \ 0)$
c) Pasa por el punto (5,3,1) y es paralela al eje Z.
d) Pasa por los puntos (-1,2,4) y (2,1,1)

Recta en el espacio

1. Para que valor de "a", el punto (3,a) pertenece a la recta
$$L = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}.$$
2. Para qué valor de "b", el punto (3,5,1) pertenece a la recta
$$L = \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 2 + bt \\ z = 3 - t \end{cases}$$