Álgebra y Cálculo

Unidad 6: Matrices
Operaciones con Matrices

Matrices

Vector renglón de n componentes:

- Un vector renglón de n componentes se define como un conjunto ordenado de *n* números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Vector columna de n componentes:

- Un vector columna de n componentes es un conjunto ordenado de *n* números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matrices: Definición

Una matriz A de ***mxn*** es un arreglo rectangular de ***mn*** números dispuesto en **m** renglones y **n** columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrices iguales – Matrices especiales

- **Matrices iguales:**

Dos matrices A= a_{ij} y B = b_{ij} son iguales si:

a) Son del mismo tamaño.

b) Las componentes correspondientes son iguales.

- **Matriz cero:**

Es una matriz de $m \times n$ **cuyos elementos son todos iguales a cero.** (O$m \times n$).

- **Matriz cuadrada:**

Es una matriz que tiene el **mismo número de columnas que de renglones**, por ejemplo m renglones y m columnas.

- **Matriz identidad:**

Es una matriz cuadrada con **todos los elementos de la diagonal principal igual a 1 y el resto 0** (I$n \times n$).

Suma de Matrices

Sean $\boldsymbol{A} = (aij)$ y $\boldsymbol{B} = (bij)$ dos matrices de *mxn*,
La suma de A y B es la matriz resultante de tamaño *mxn* , denotada como $A+B$ definida por:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir es la matriz que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y de B.

Multiplicación de una matriz por un escalar:

Si $\boldsymbol{A} = (aij)$ es una matriz de ***mxn*** y si $\boldsymbol{\alpha}$ es un escalar, entonces la matriz de ***mxn*** , denotada como **α A** está dada por:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir $\alpha \boldsymbol{A} = \alpha \boldsymbol{a_{ij}}$ es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de A por α.

Observación: la resta de matrices se realiza mediante la suma de una matriz y la opuesta (multiplicación de cada elemento por el escalar $\alpha = -1$) de la otra.

Propiedades de la suma de Matrices:

Sean las matrices A, B y C de ***mxn*** y $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ sean dos escalares:

i) $A + O = A$
ii) $0A = O$
iii) $A + B = B + A$
iv) $(A + B)+C = A +(B+C)$
v) $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$
vi) $1 .A = A$
vii) $(\alpha + \beta).A = \alpha A + \beta A$

Producto escalar de vectores: Definición

Sean $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores de n componentes.

El producto escalar de a y b , denotado por ***a.b,*** es el escalar dado por:

$$\boldsymbol{a.b} = \boldsymbol{a_1.b_1} + \boldsymbol{a_2.b_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n.b_n}$$

Propiedades del producto escalar:

Sean **a**, **b** y **c** tres vectores de dimensión *n* y *α* un escalar. Entonces:

i) **a.0 = 0**

i) **a.b = b.a**

i) **a.(b+c) = a.b + a.c**

i) (α **a**).**b** = α (**b.a**)

Producto de dos matrices

Sea **A** = (*aij*) una matriz de *mxn* y **B** = (*bij*) una matriz de *nxp*. Entonces el producto de **A** y **B** es una matriz **C**= *cij*, de *mxp*, donde:

$$c_{ij} = (\boldsymbol{Renglon\ i} \text{ de A}).(\boldsymbol{Columna\ j} \text{ de B})$$

$$c_{ij} = \boldsymbol{a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \cdots + a_{in}.b_{nj}}$$

Renglón i

Columna j

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto matricial

Ley asociativa del producto de matrices:

Sea $A = a_{ij}$ una matriz de $m \times n$, $B = b_{ij}$ una matriz de $n \times p$ y $C = c_{ij}$ una matriz de $p \times q$, entonces:

$$(AB)C = A(BC)$$

Observación: la matriz obtenida es una matriz de $m \times$ q

Propiedades del producto matricial

Ley distributiva del producto de matrices:

Si todas las sumas y todos los productos siguientes están definidos, entonces:

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$(A+B)C = AC+BC$$

Propiedades del producto matricial

Dadas $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, calcule:

$C = AB$

$D = BA$

¿Son C y D matrices iguales?

Conclusión: el producto matricial NO ES CONMUTATIVO.

Matrices y Sistemas de ecuaciones:

Un sistema de *m* ecuaciones y *n* incógnitas

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Vector de incógnitas

Vector de términos independientes

Forma Matricial $Ax = b$

Algunos ejercicios con vectores y matrices…

Dados los vectores: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$, calcule:

i) $\mathbf{3}\boldsymbol{a} + \mathbf{0}$

ii) $-\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$

iii) $\mathbf{2}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})$

Algunos ejercicios con vectores y matrices…

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

i) $3A$

ii) $-7A + 3B$

iii) $A + B - C$