Facultad de Ingeniería UNER

# Álgebra y Cálculo

***Tecnicatura universitaria en procesamiento y explotación de datos***

***TUPED - 1° C***

Facultad de Ingeniería UNER

## *Unidad 4:*

# *Integrales*

*TUPED - 1° C*

# *Antiderivadas*

***Definición***

Una función F recibe el nombre de *antiderivada* de $f$ sobre un intervalo I si

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x$ en I.

Por ejemplo, una antiderivada de $f(x) = x^2$ es la función:

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ ya que $F'(x) = f(x)$

Observemos que también son antiderivadas de $f(x)$ las funciones:

$$G(x) = \frac{x^3}{3} + 1 \qquad \text{y} \qquad H(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}$$

# *Antiderivadas: Teorema*

Si $F$ es una antiderivada de $f$ sobre un intervalo $I$, entonces la antiderivada más general de f sobre $I$, es:

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

# *Antiderivadas: Geométricamente*

$$y = \frac{x^3}{3} + 3$$

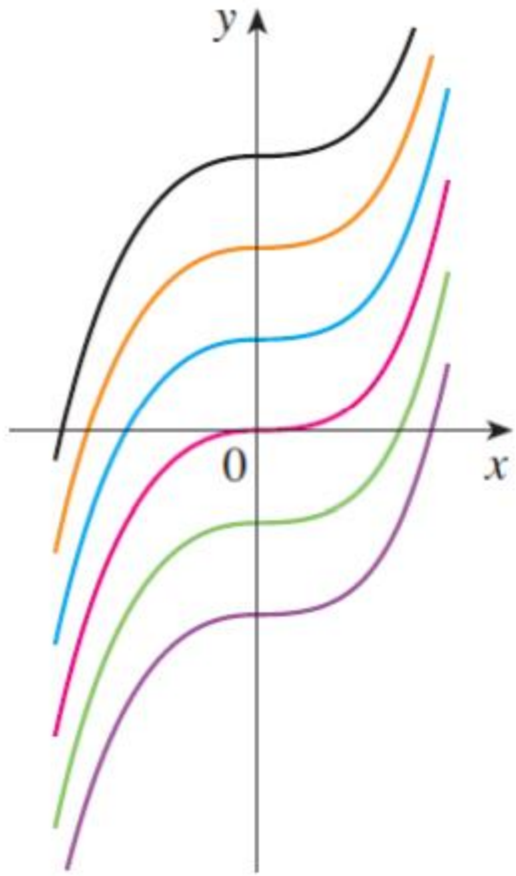
$$y = \frac{x^3}{3} + 2$$

$$y = \frac{x^3}{3} + 1$$

$$y = \frac{x^3}{3}$$

$$y = \frac{x^3}{3} - 1$$

$$y = \frac{x^3}{3} - 2$$



# Antiderivadas: Notación

La antiderivada de $f(x)$ se expresa como:

$$\int f(x)dx$$

Integral

Diferencial de $x$

Integrando

Se lee: la integral de $f(x)$ diferencial de $x$

$F(x) = \int f(x)dx$ ya que $F'(x) = f(x)$

$\boxed{\text{Es una integral indefinida de } f(x)}$

# *Antiderivadas: Notación*

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrando}}\, \overbrace{dx}^{\text{Variable de integración}} = \underbrace{F(x)}_{\text{Una antiderivada de } f(x)} + \overbrace{C}^{\text{Constante de integración}}.$$

En nuestro ejemplo, encontramos la familia de antiderivadas:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

# Integrales indefinidas: Sustitución directa

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Con $f(x)$ y $g(x)$ funciones de $x$; $k$ y $c$ constantes reales

# *Antiderivadas: Ejemplo*

Encuentre una antiderivada para las siguientes funciones:

*I.* $f(x) = x + 1$

*II.* $g(x) = e^x - 2x$

## *Integrales indefinidas: Ejemplo Sustitución directa*

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx = \int x^2\, dx - \int 2x\, dx + \int 5\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.$$

En primer lugar se reescribe a la integral original como la suma/resta de las Integrales. Luego se integra cada una de ellas por separado, aplicando las reglas de sustitución directa correspondientes.

Finalmente, se agrega a la integral obtenida la constante de integración.

# *Ejercicios:*

Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int 3dx$

b. $\int 2x^4 - 1\, dx$

c. $\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x} dx$

d. $\int x(x-3)^2 dx$

e. $\int e^x + \sqrt{x}\, dx$

f. $\int \frac{7}{x}\, dx$

## *Integración por sustitución:*

Encuentre la siguiente integral indefinida:

$$\int 2x(x^2 - 4)^3 \, dx$$

En este caso, podríamos desarrollar la potencia, aplicar propiedad distributiva e integrar la suma de los términos resultantes.

Pero ¿si el exponente en lugar de 3 es, por ejemplo, 5?
Se invierte demasiado tiempo en este trabajo algebraico, entonces buscamos otra estrategia:

Podemos reescribir a la función compuesta (integrando) $f(g(x))$ como una función en términos de una variable $u$, es decir, $f(u)$ donde $u = g(x)$ y luego aplicamos la llamada **regla de sustitución.**

# Integrales indefinidas: Regla de sustitución

Si $u = g(x)$ es una función derivable en el intervalo $I$ y $f$ es continua sobre $I$, entonces:

$$\int f(g(x))g'(x) = \int f(u)du$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Función exterior

Función interior

Derivada de la función interior

# Regla de sustitución: Ejemplo

Analicemos nuestro ejemplo:

Función exterior

$$\int 2x(x^2 - 4)^3\, dx$$

Derivada de la Función interior

Función interior

Según la regla de la cadena, debemos reescribir nuestra integral de la siguiente manera:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\, dx = \int f(u)du$$

$$u = x^2 - 4$$
$$du = 2xdx$$

Entonces:

$$\int 2x(x^2 - 4)^3\, dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2-4)^4}{4} + C$$

# *Regla de sustitución: Resumen*

Dada la integral de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Aplicamos la regla de sustitución de la siguiente manera:

1. Sustituimos $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$ en la integral original para obtener la forma: $\int f(u)du$

2. Integramos con respecto a $u$ por sustitución directa.

3. Finalmente, reemplazamos $u$ por $g(x)$ en el resultado obtenido.

# *Ejercicios:*

Resuelva las siguientes integrales aplicando el método de sustitución:

*I.* $\int x^5(5x^4)\,dx$

*II.* $\int \frac{1}{2}(x^2-1)\,x\,dx$

*III.* $\int \sqrt[3]{4x-1}\,dx$

*IV.* $\int 2e^{x-2}\,dx$

*V.* $\int \frac{1}{x-5}\,dx$

# *Integrales indefinidas: Uso de tablas*

Si bien existen diversos métodos para reescribir integrandos de manera más sencilla y así aplicar sustitución directa, hay muchos casos en los cuales hay que recurrir necesariamente a la tabla.

- Las tablas de integrales son útiles cuando abordamos integrales difíciles.
- Por lo general el integrando no surge de la forma exacta en la que se encuentran en la tabla.
- Muchas veces necesitamos aplicar la regla de sustitución y/o manipulación algebraica para reescribir el integrando y poder usar la *forma* que indica la tabla.

# TABLA DE INTEGRALES

## Formas exponenciales y logarítmicas

**96.** $$\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au - 1)e^{au} + C$$

**97.** $$\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$$

**100.** $$\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$$

**101.** $$\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$$

**102.** $$\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$$

## Formas que involucran $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$

**39.** $$\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

**40.** $$\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

**41.** $$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$$

**42.** $$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

**43.** $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

**44.** $$\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

**45.** $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$$

**46.** $$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

## Formas que involucran $a + bu$

**47.** $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a + bu - a\ln|a+bu|) + C$

**48.** $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right] + C$

**49.** $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

**50.** $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

**51.** $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

**52.** $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

**53.** $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

**54.** $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + C$

**55.** $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a+bu} + C$

# *Integrales indefinidas: Uso de tablas*

Encuentre las siguientes integrales utilizando la tabla:

1. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{3x} dx$

2. $\int \frac{1}{x(x+4)} dx$

3. $\int 2.lx(x)dx$

4. $\int \frac{x}{2+4x} dx$

# *Integrales indefinidas: Aplicación*

Una partícula se mueve en línea recta con una aceleración definida por:

$$a(t) = 6t + 4.$$

Su velocidad inicial es $v(0) = -6\frac{cm}{s}$ y su posición inicial es $s(0) = 9cm$.

Encuentre su función posición denotada por $s(t)$.

# *Integrales indefinidas: Aplicación*

Dado que $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, la antiderivada general es:

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$. Según los datos, $v(0) = -6$, entonces $C = -6$ y:

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Dado que $v'(t) = s(t)$, $s$ es la antiderivada de $v$:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Vemos que $s(0) = D$, entonces tenemos que $D = 9$, y la función posición requerida es:

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$