Facultad de Ingeniería
UNER

Álgebra y Cálculo

Tecnicatura universitaria en procesamiento y explotación de datos

TUPED - 1° C

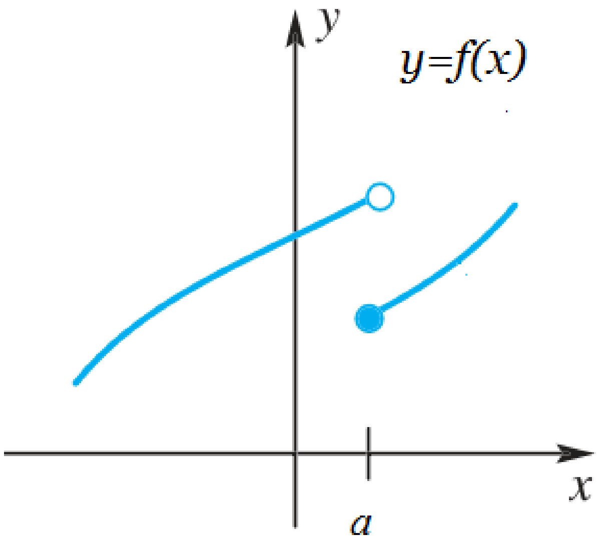
Facultad de
UNER Ingeniería

Unidad 2:

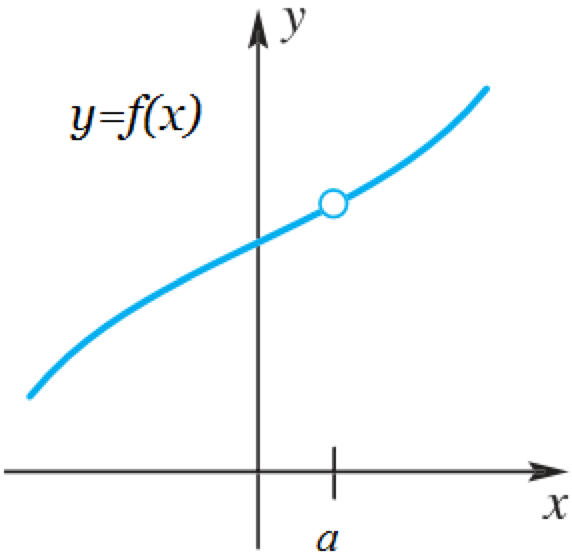
Continuidad

Continuidad

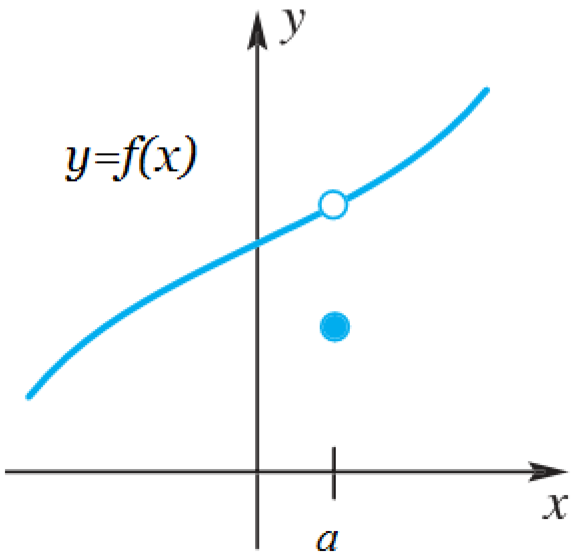
Consideremos los siguientes gráficos de f y observemos que ocurre en a



- $\lim_{x \to a} f(x)$ *No existe*
- *f(a) existe*



- $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*
- *f(a) No existe*



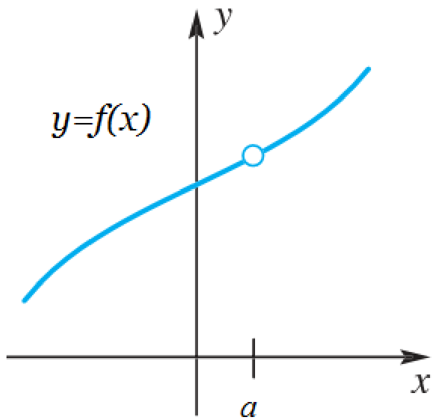
- $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*
- *f(a) existe*

  pero

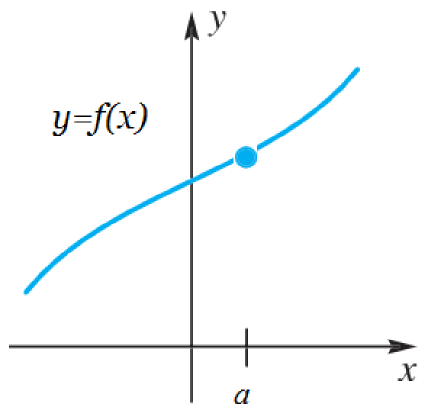
  $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Continuidad

Entonces, un gráfico es continuo en *a* cuando:

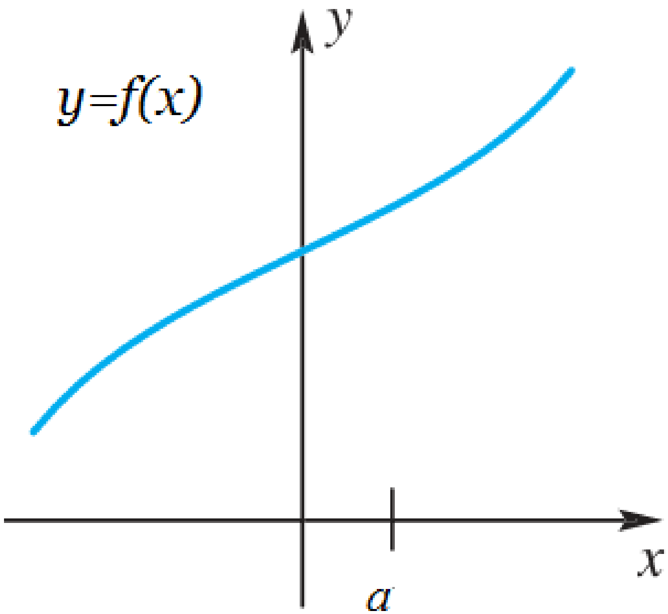


- $\lim_{x \to a} f(x)$ ***existe***



- *f*(*a*) ***está definida***,

(*a* está en el dominio de f)



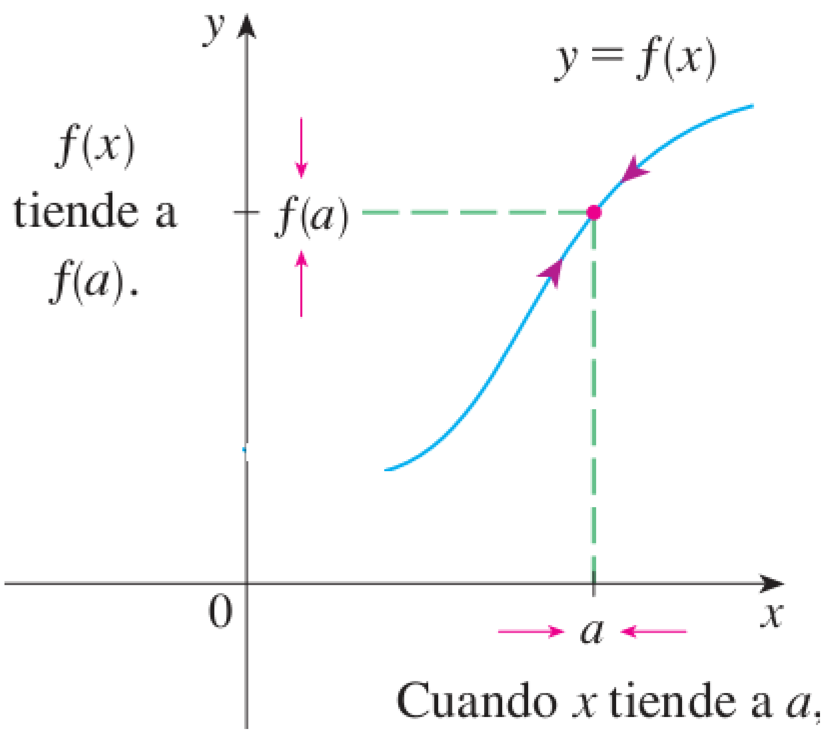
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Continuidad

Definición:

Una función f es ***continua en un número*** $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$



Es decir

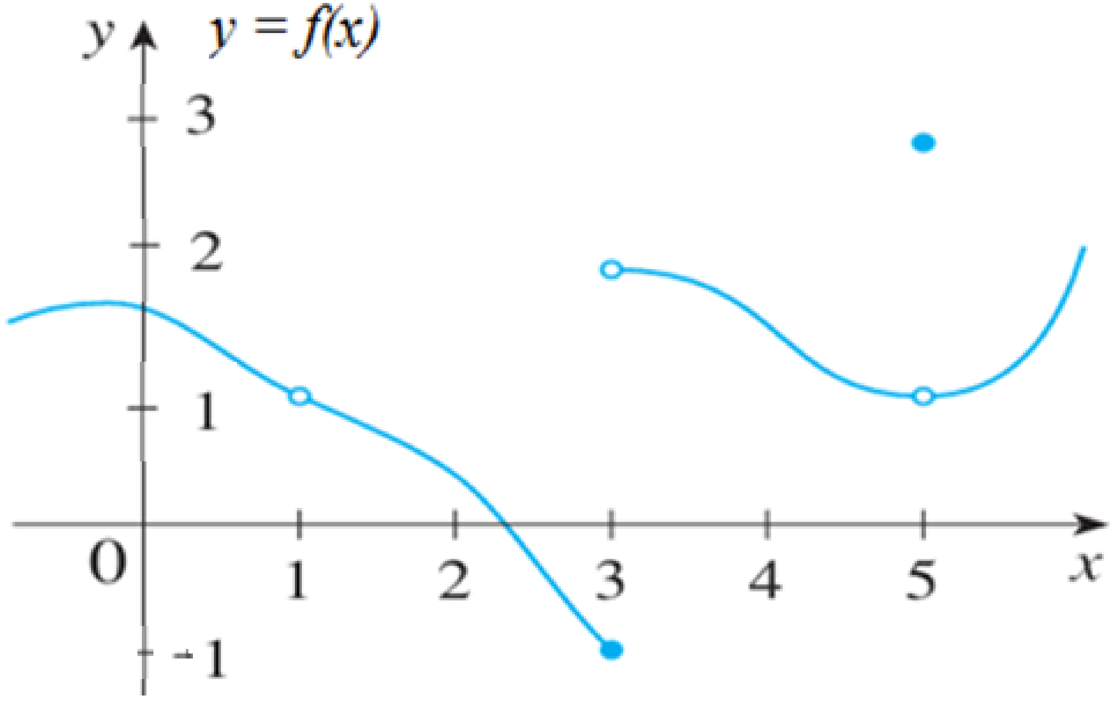
si f es ***continua*** en a, entonces

- $f(a)$ ***está definida***, (esto es, a está en el dominio de f)
- $\lim_{x \to a} f(x)$ ***existe***
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

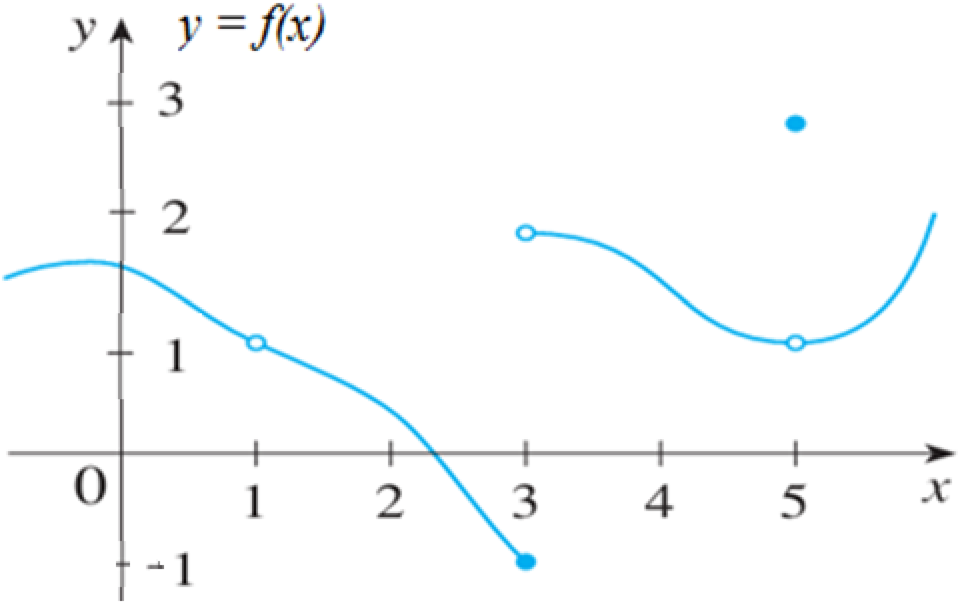
Si f está definida cerca de a, (excepto quizás en a) y no es continua en a, se dice que f es ***discontinua*** en a (o tiene una **discontinuidad** en a)

Continuidad

Ejemplo: ¿Para qué valores de *x* la función es discontinua y por qué?



Continuidad



f es ***continua*** en a

- $f(a)$ ***está definida***
- $\lim_{x \to a} f(x)$ ***existe***
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Analizaremos la continuidad en 1, 3 y 5..

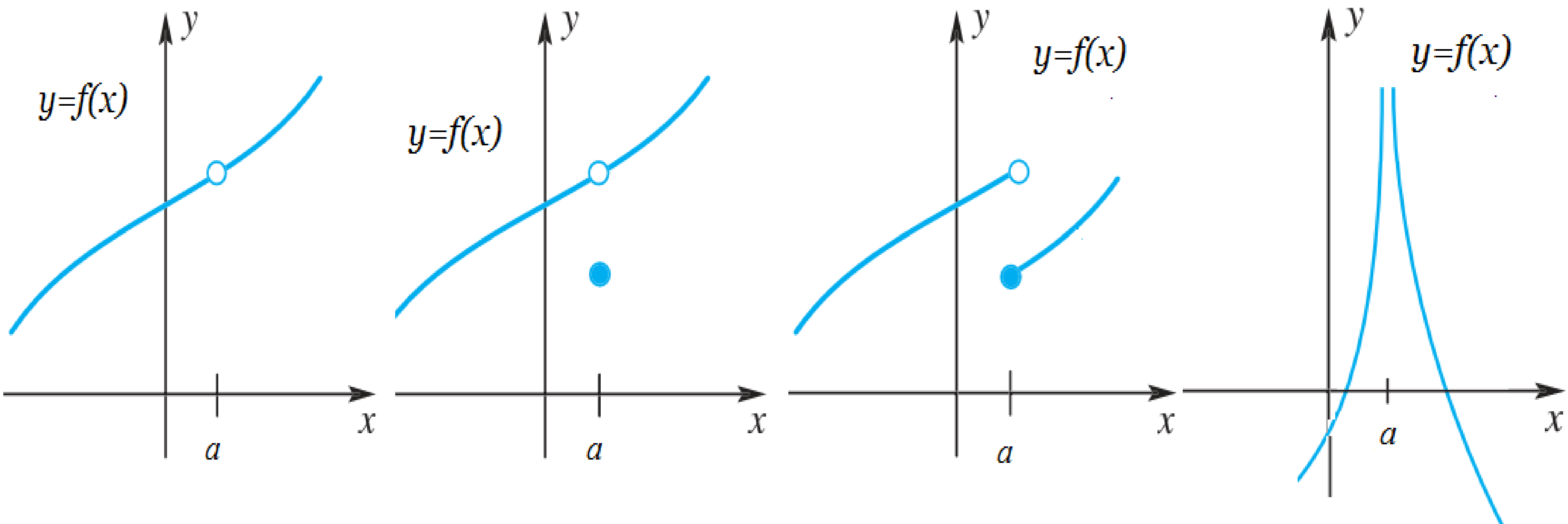
f(1) no está definido por lo tanto f es ***discontinua*** *en 1.*

- $\lim_{x \to 3} f(x) =$ ***No existe*** *porque* $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$ ***-1 y*** $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$ *porque* $\lim_{x \to 5} f(x) = 1$ *y* $f(5) = 3$

Clasificación de las discontinuidades:

- Evitables o removibles : podemos remover la discontinuidad redefiniendo f .

- Inevitables o no removibles
  - Discontinuidad infinita
  - Discontinuidad de salto



Discontinuidad evitable	Discontinuidad evitable	Discontinuidad inevitable de salto	Discontinuidad inevitable infinita

Continuidad lateral

Definición:

Una función f es:

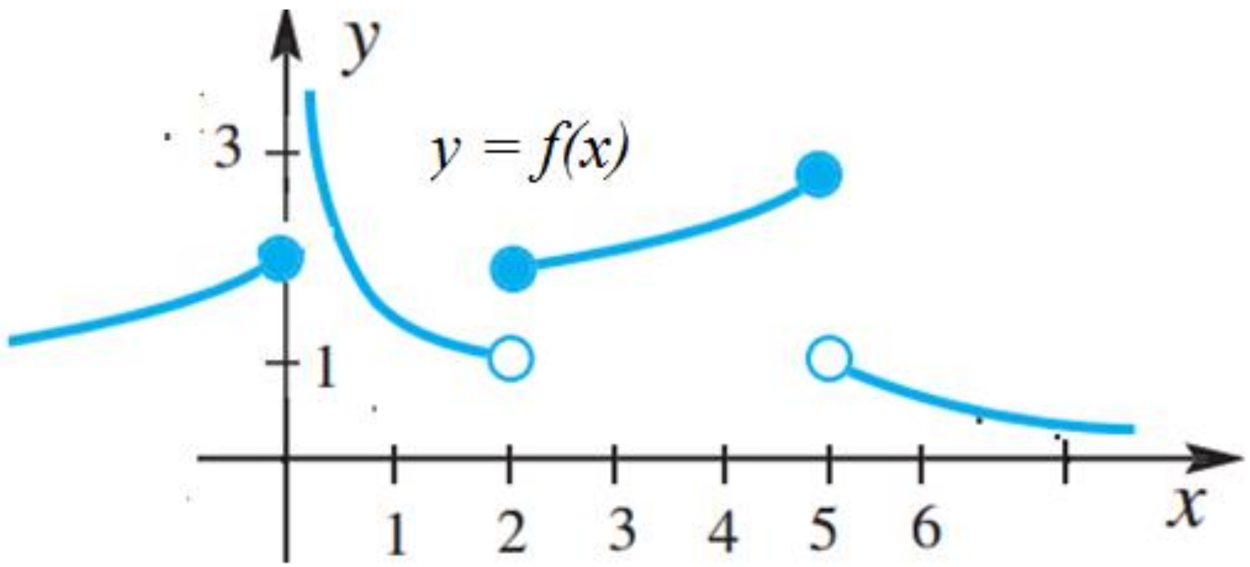
continua por la derecha *en un número* $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y ***continua por la izquierda*** *en un número* $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Ejemplo

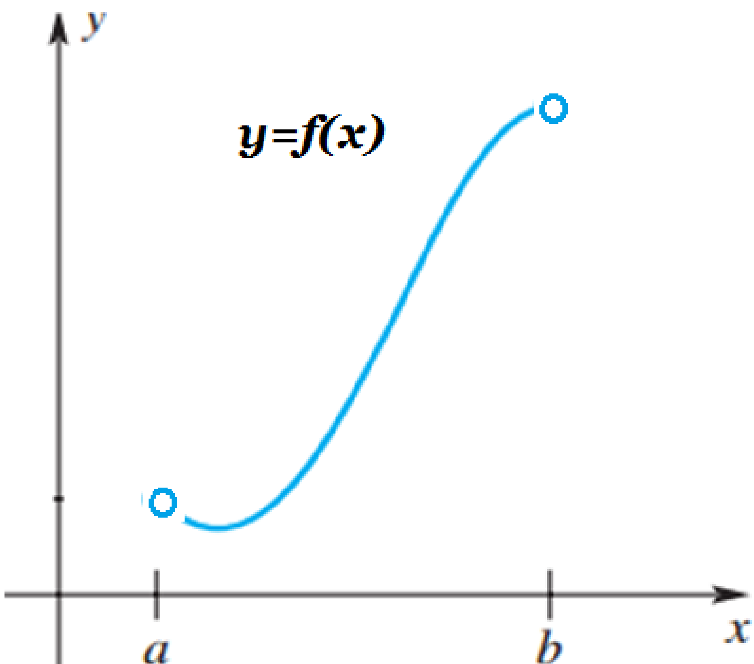


Continuidad en un intervalo

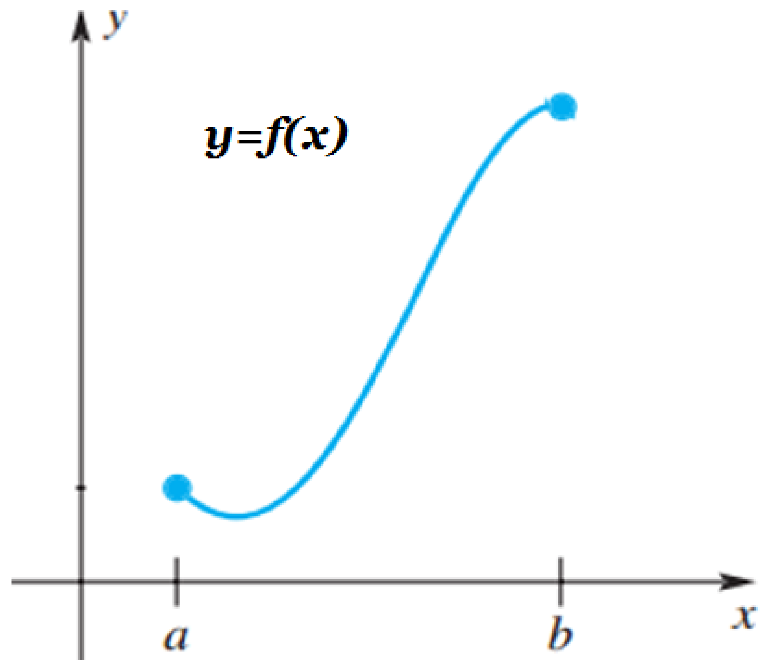
Definición Una función f :

- es ***continua sobre un intervalo abierto (a,b)*** si es continua en cada número en el intervalo
- es ***continua sobre un intervalo cerrado [a,b]*** si es continua en el intervalo abierto (a, b) y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$



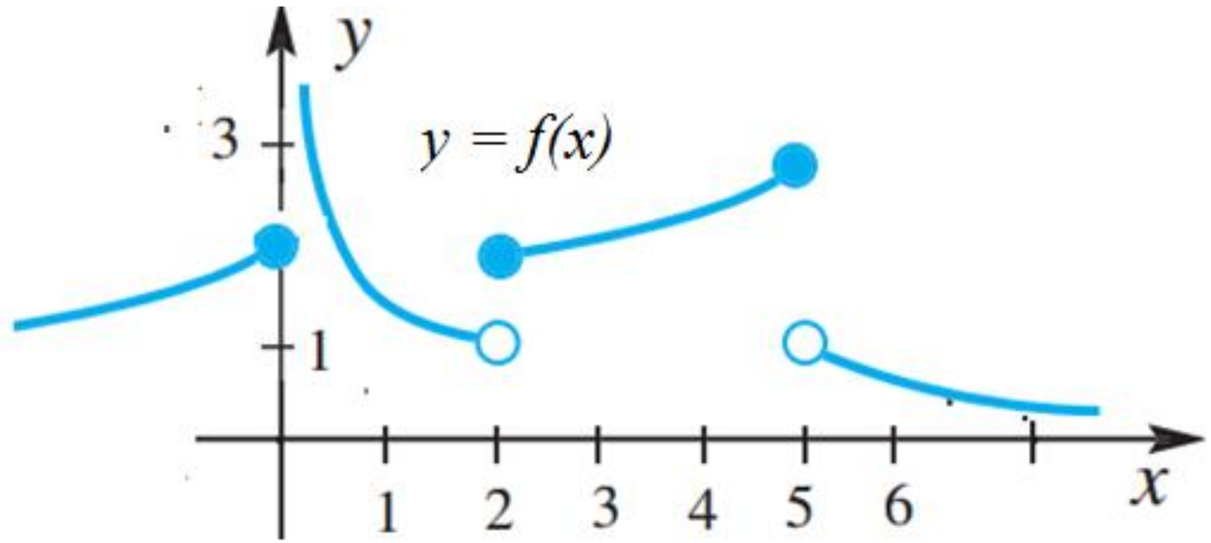
Continua en (a,b)



Continua en [a,b]

Continuidad en un intervalo

Ejemplo: Observando la gráfica de f :



- f es ***continua*** sobre el intervalo abierto $(0,2)$ y
- f es ***continua*** sobre el intervalo cerrado $[2,5]$ ya que es continua en el intervalo abierto $(2,5)$ y

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \quad y \quad \lim_{x \to 5^-} f(x) = f(5)$$

Propiedades de las funciones continuas

TEOREMA 9 Propiedades de las funciones continuas

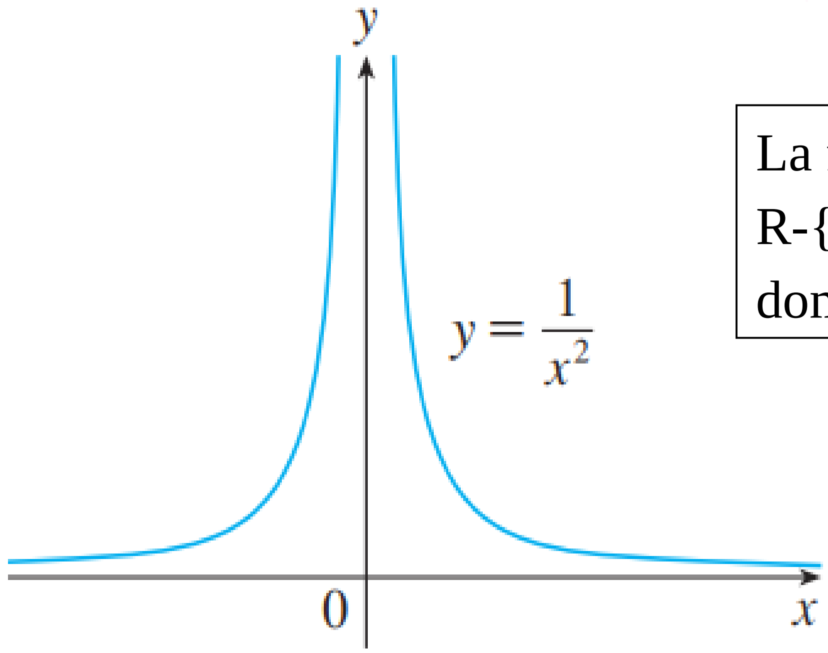
Si las funciones f y g son continuas en $x = c$, entonces las combinaciones siguientes son continuas en $x = c$.

1. *Sumas:*	$f + g$
2. *Diferencias:*	$f - g$
3. *Productos:*	$f \cdot g$
4. *Múltiplos constantes:*	$k \cdot f$, para cualquier número k
5. *Cocientes:*	f/g siempre y cuando $g(c) \neq 0$
6. *Potencias:*	$f^{r/s}$, siempre y cuando esté definida en un intervalo abierto que contenga a c, donde r y s son enteros.

Continuidad

Funciones Continuas

Diremos que una función es continua si es continua en todo su dominio



La función es ***continua***, pues su dominio es R-{0} y es continua en cada número de su dominio.

Continuidad

Las funciones de los siguientes tipos son ***CONTINUAS*** en su ***DOMINIO***.

- ***Funciones polinomiales:***

$$p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

- ***Funciones racionales:*** $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\ ,\ \ q(x) \neq 0$
- ***Funciones radicales:*** $f(x) = \sqrt[n]{x}$
- ***Funciones exponenciales:*** $f(x) = a^x,\ \ a > 0, a \neq 1$
- ***Funciones logarítmicas:*** $f(x) = \log_a x\,, a > 0, a \neq 1$