Facultad de Ingeniería UNER

Álgebra y Cálculo

Tecnicatura universitaria en procesamiento y explotación de datos

TUPED - 1° C

Facultad de Ingeniería UNER

Unidad 2:

Límites

Límite de una función: Definición informal

Sea $f(x)$ definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 , *excepto posiblemente, en el mismo punto* x_0 . Si $f(x)$ se acerca tanto como queramos a L para todo x *lo suficientemente cerca* de x_0, decimos que f se aproxima al **límite** L cuando x se aproxima a x_0 y podemos escribir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

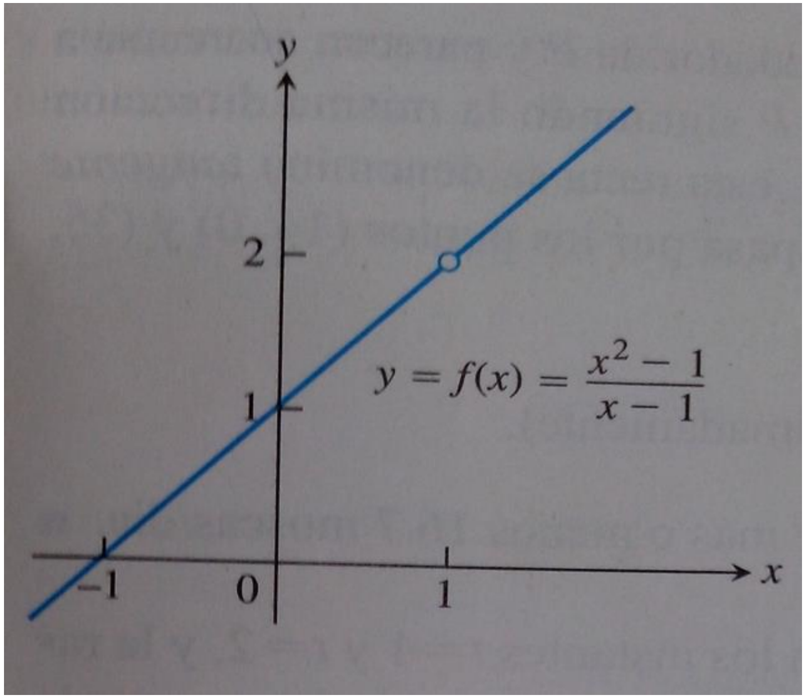
Se lee: *"el limite de f(x) cuando x tiende a x_0 es L"*

Ejemplo

Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Indiquemos su dominio y realicemos
su gráfica:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad ; x \neq 1$$



¿ Como se comporta la función cerca de $x = 1$?

Podemos determinar el valor de la función $f(x)$ tan cerca como queramos de 2 eligiendo un valor de x lo suficientemente cercano a 1.

TABLA 2.2 Cuando x está más cerca de 1, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ parece estar más cerca de 2

Valores de x arriba y debajo de 1	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

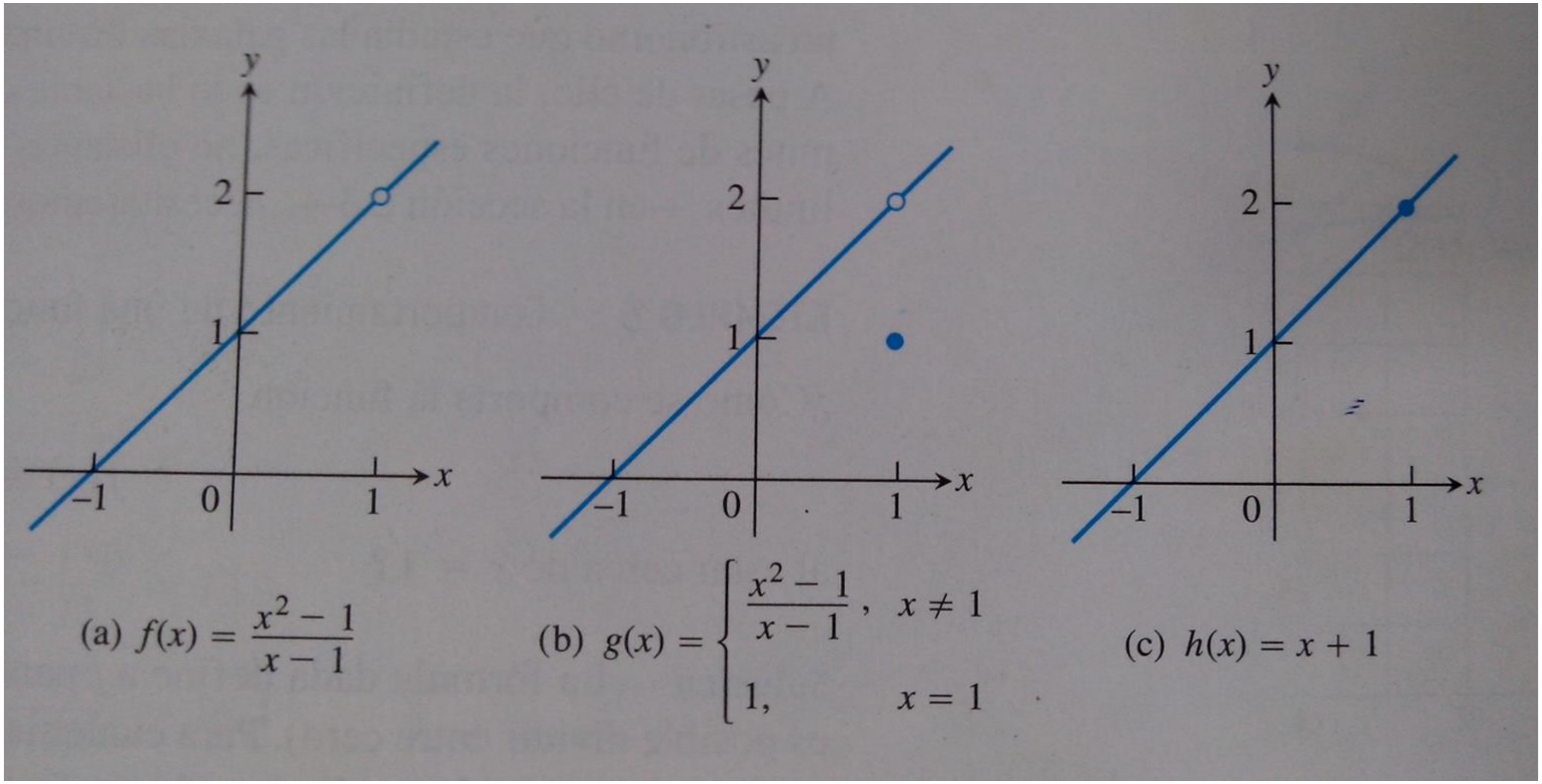
Se dice que $f(x)$ se acerca a 2 cuando x se aproxima a 1

Se expresa

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

o

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$



$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$

La función $f(x)$ no está definida en $x = 1$

El valor del limite no depende de como se comporta la función exactamente en x_0

Para muchos tipos de funciones, el límite se puede hallar de la siguiente manera:

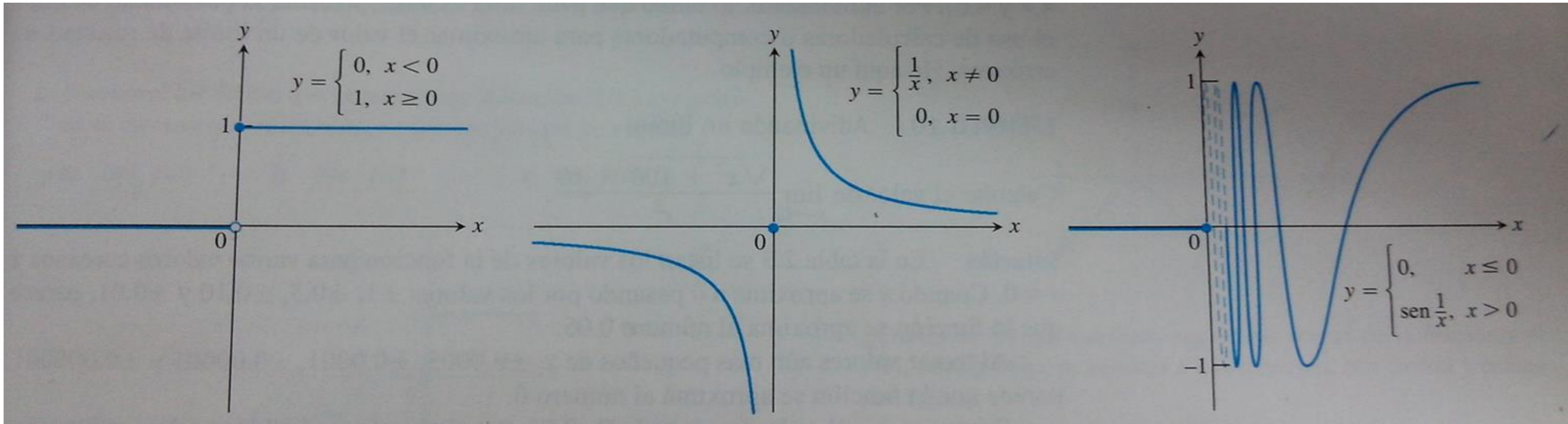
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Ejemplo: funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y combinaciones algebraicas entre las mismas.

$$\lim_{x \to 1} (x-3)^2 \qquad \lim_{x \to 0} 3x^2 - e^{x+1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{2}{x+3}$$

¿El límite de una función en un punto siempre existe? NO

Por ejemplo:



(a) Función escalón unitario $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

En $x_0 = 0$

No hay un único valor de L al que tienda $U(x)$ cuando me acerco al valor cero.

En $x_0 = 0$

No, pues a medida que me acerco al cero la función crece o decrece infinitamente.

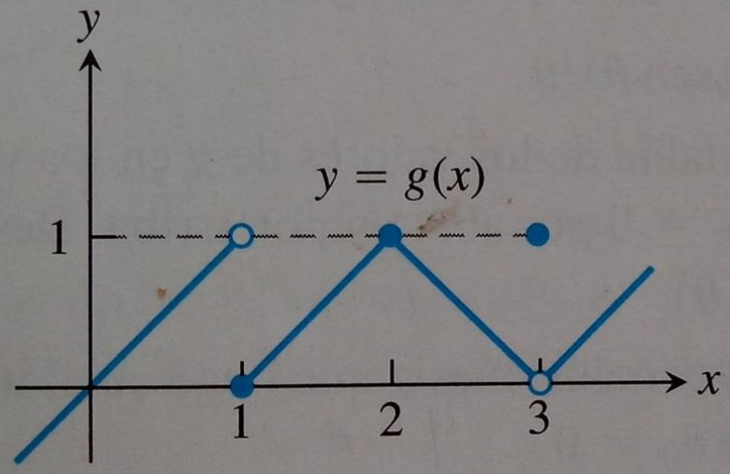
En $x_0 = 0$

No existe el límite. La función oscila cada vez más rápido a medida que me acerco a cero. Los valores no permanecen nunca cerca de un valor determinado.

Cálculo de limites a partir de la gráfica de una función:

1. Determine los límites que se piden para la función $g(x)$, cuya gráfica se muestra a continuación, o explique por qué no existen.

a. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ **c.** $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$



Cálculo de límites mediante las leyes de los límites:

- El límite de una función $f(x) = k$; con $k = cte$:

$$\boxed{\lim_{x \to c} k = k}$$

- El limite de una función $f(x) = x$

$$\boxed{\lim_{x \to c} x = c}$$

TEOREMA 1 **Leyes de los límites**

Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. *Regla de la suma*: $$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

El límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites.

2. *Regla de la diferencia*: $$\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$$

El límite de la diferencia de dos funciones es la diferencia de sus límites.

3. *Regla del producto*: $$\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

El límite del producto de dos funciones es el producto de sus límites.

4. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

El límite de una constante multiplicada por una función es la constante por el límite de la función.

5. *Regla del cociente:* $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

El límite del cociente de dos funciones es el cociente de sus límites, siempre y cuando el límite del denominador sea distinto de cero.

6. *Regla de la potencia:* Si r y s son enteros sin factores comunes y $s \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

siempre y cuando $L^{r/s}$ sea un número real. (Si s es par, suponemos que $L > 0$).

El límite de una potencia racional de una función es el límite de la función elevado a esa potencia, siempre y cuando esta última sea un número real.

TEOREMA 2 **Los límites de las funciones polinomiales pueden encontrarse por sustitución**

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

TEOREMA 3 **Los límites de las funciones racionales pueden encontrarse por sustitución si el límite del denominador es distinto de cero**

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales y $Q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Por ejemplo:

Límite de una función racional

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$$

Si denominamos $P(x) = x^2 + x - 2 \;\; y \;\; Q(x) = x^2 - x$ al numerador y denominador respectivamente:

¿Qué ocurre con $P(x)$ y $Q(x)$ cuando x tiende a 1?

Ambos son iguales a cero al hacer $P(1)$ y $Q(1)$.
Estamos en presencia de una indeterminación: el numerador y el denominador tienden a cero cuando x tiende a uno.

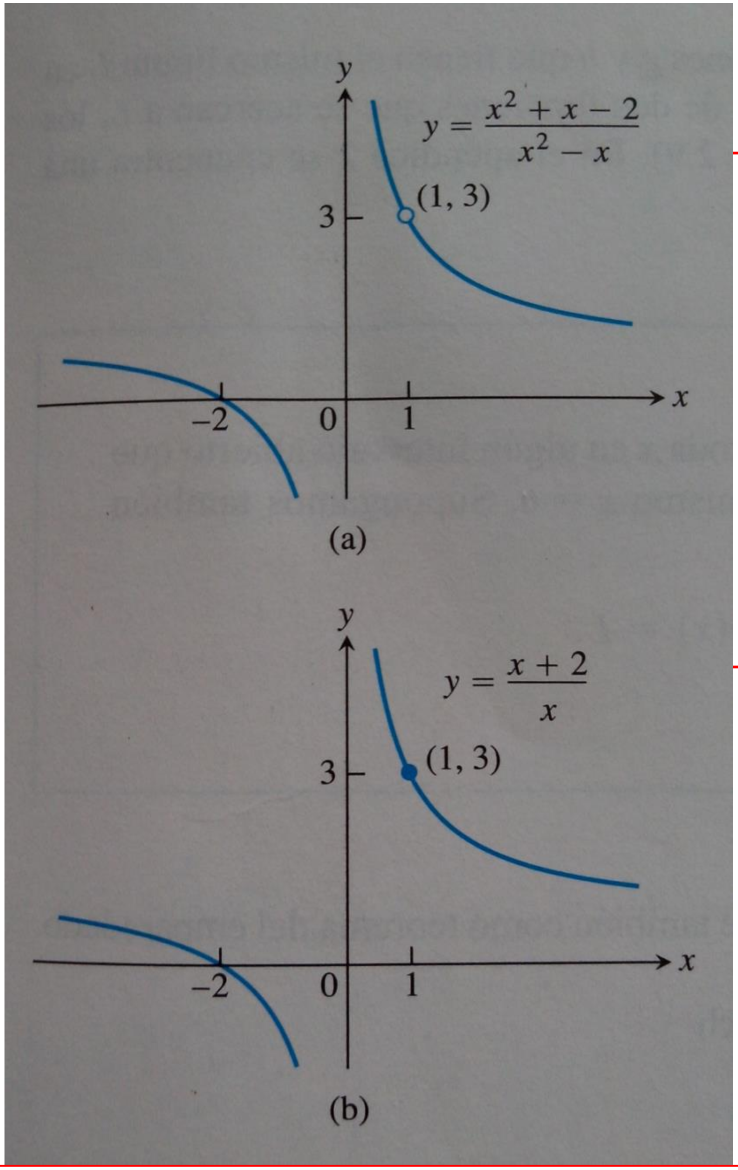
Indeterminación del tipo "cero sobre cero"

Para poder "salvar" la indeterminación y encontrar si el límite de la función existe o no, realizamos trabajo algebraico.

En este caso factorizamos $P(x) y\ Q(x)$ para luego simplificar:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{x}=\frac{1+2}{1}=3$$

De esta manera, salvamos la indeterminación; el límite existe y es igual a 3.

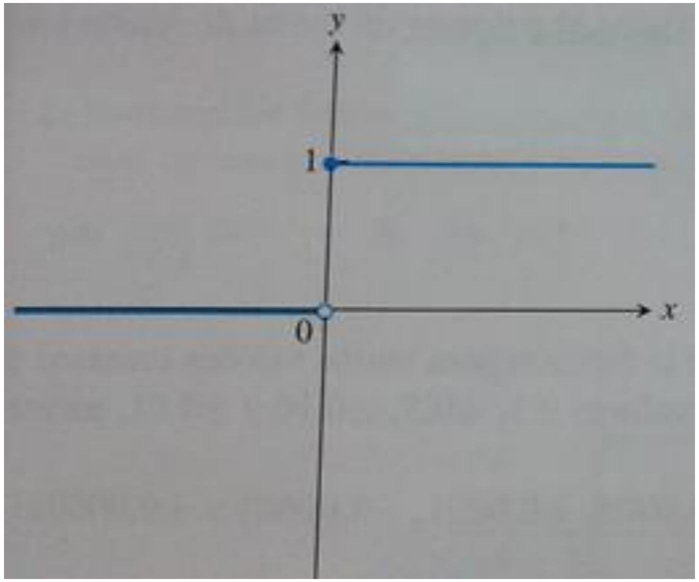


Si quisiera evaluar el limite directamente, se obtiene un cociente de la forma indeterminada “cero sobre cero”

Al trabajar algebraicamente, simplificando, se salva la indeterminación y el limite da 3

Las graficas son iguales, excepto en el punto x=1

Límites laterales



¿Existe el límite de la función dada en $x = 0$?

$\lim_{x \to 0} f(x) =$ No existe

¿Qué sucede con el límite si me aproximo solo por el lado izquierdo del cero?

¿Y por el derecho?

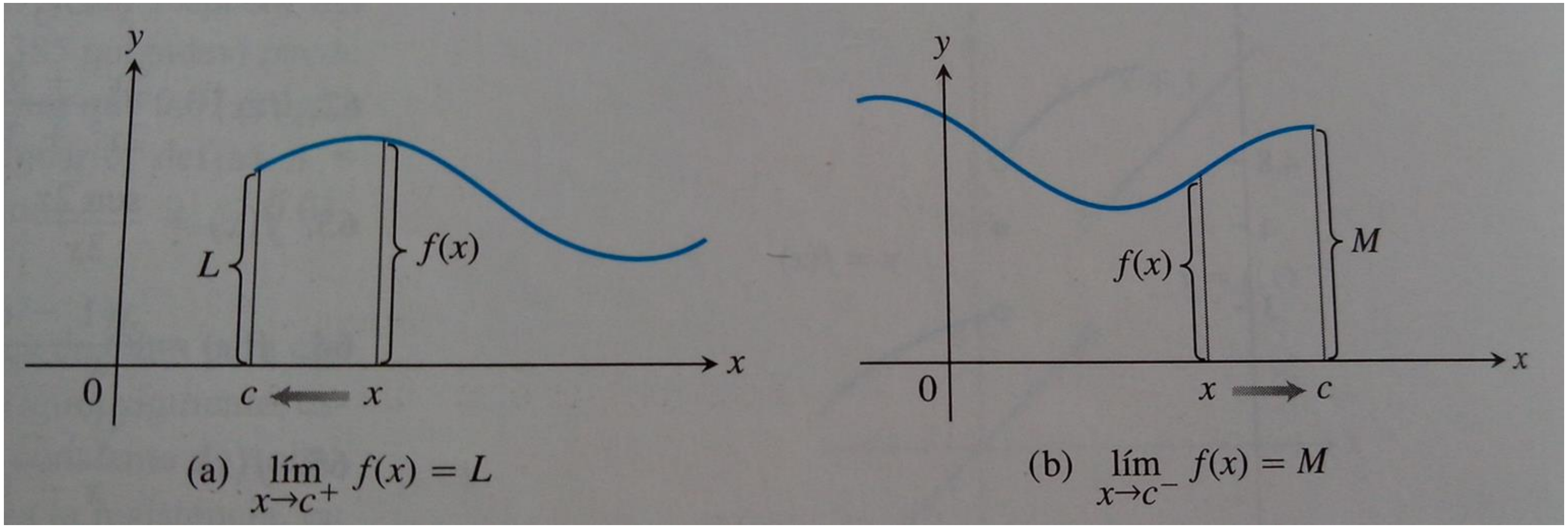
$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0}$$

Límite lateral por la izquierda

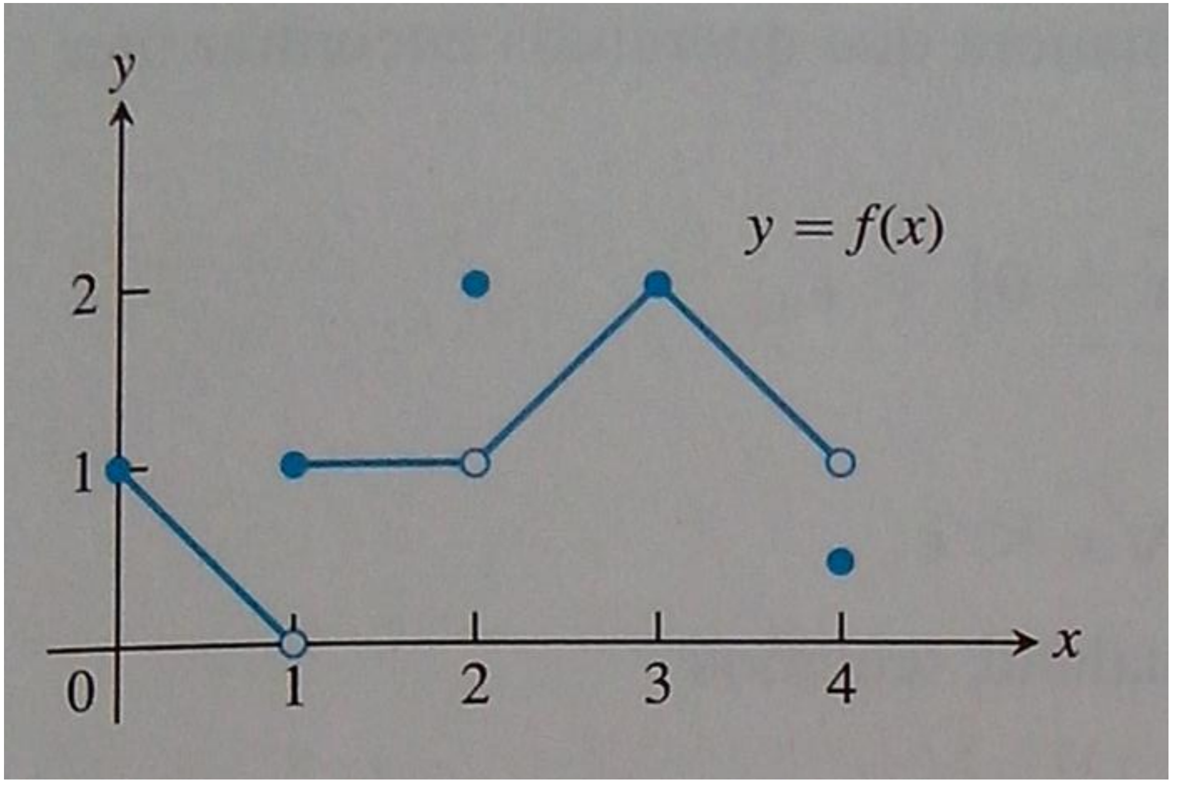
$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1}$$

Límite lateral por la derecha

Límites laterales



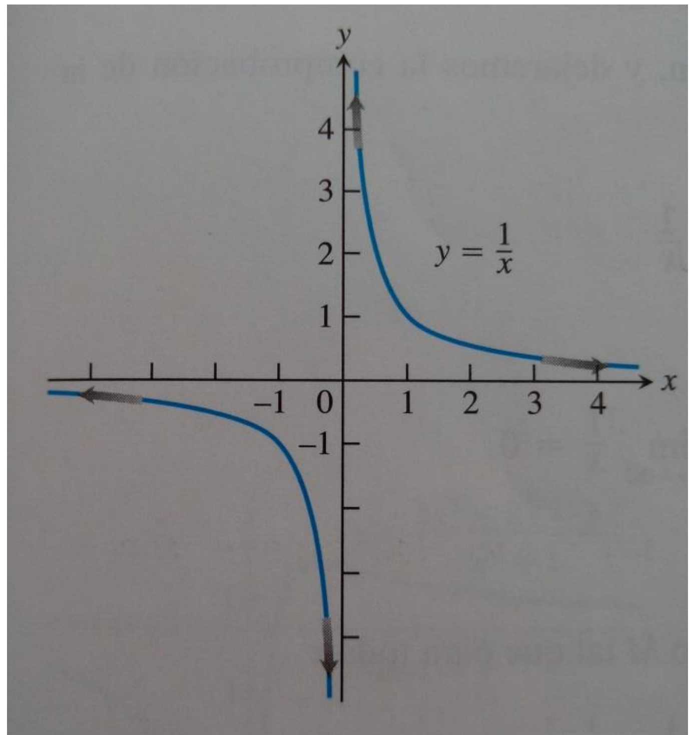
Ejemplo:



Evalúe los límites para $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ y $x = 4$.

Límites infinitos

Observemos la siguiente gráfica: ¿qué ocurre en las cercanías de $x = 0$?

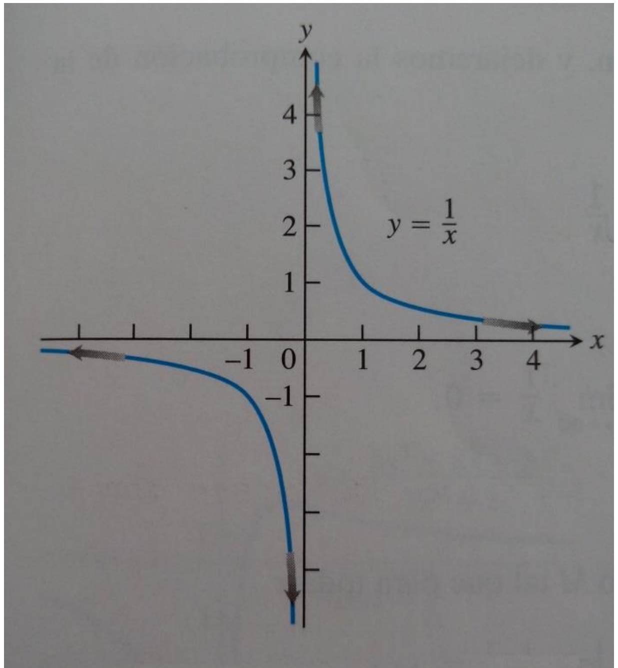


La gráfica de $y = 1/x$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

El símbolo infinito (∞) no representa un número real. En límites, es utilizado para expresar valores muy grandes (positivos o negativos) a los que tiende la función o la variable independiente.

Límites al infinito



La gráfica de $y = 1/x$.

Cuando x se hace cada vez mas GRANDE, la $f(x)$ se hace cada vez mas chica.

Dicho de otra forma:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Cuando x se hace cada vez mas PEQUEÑA, la $f(x)$ se hace cada vez mas chica.

Dicho de otra forma:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Cálculo de límites al infinito

$$\lim_{x \to \pm\infty} k = k$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

1- Encontramos los limites de la función $f(x) = k$ y $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{x}$

2- Extendemos el procedimiento a otras funciones mediante la aplicación de las leyes de los límites.

TEOREMA 8 Leyes de los límites cuando $x \to \pm\infty$

Si L, M y k son números reales y

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M$

2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = L - M$

3. *Regla del producto:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

4. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{x\to\pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

5. *Regla del cociente:* $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

6. *Regla de la potencia:* Si r y s son enteros sin factores comunes, $s \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

siempre y cuando $L^{r/s}$ sea un número real. (Si s es par, damos por hecho que $L > 0$).

Resolver:

$$\lim_{x\to\infty}(5+\frac{1}{x}) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi^2}{x^2}\right) =$$

Límites al infinito en funciones racionales

Resuelva el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty} \quad INDETERMINACIÓN}$$

Nuevamente se nos presenta una indeterminación, en este caso de la forma "infinito sobre infinito".
Recurrimos al trabajo algebraico para salvar la indeterminación:

- Se divide al numerador y al denominador (para no modificar la expresión) por la mayor potencia de x del denominador.
- Se aplica la propiedad del cociente de potencias de igual base para simplificar.
- Se vuelve a evaluar el límite a la expresión obtenida, concluyendo que el mismo existe o es infinito.

Resolver:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1}$$

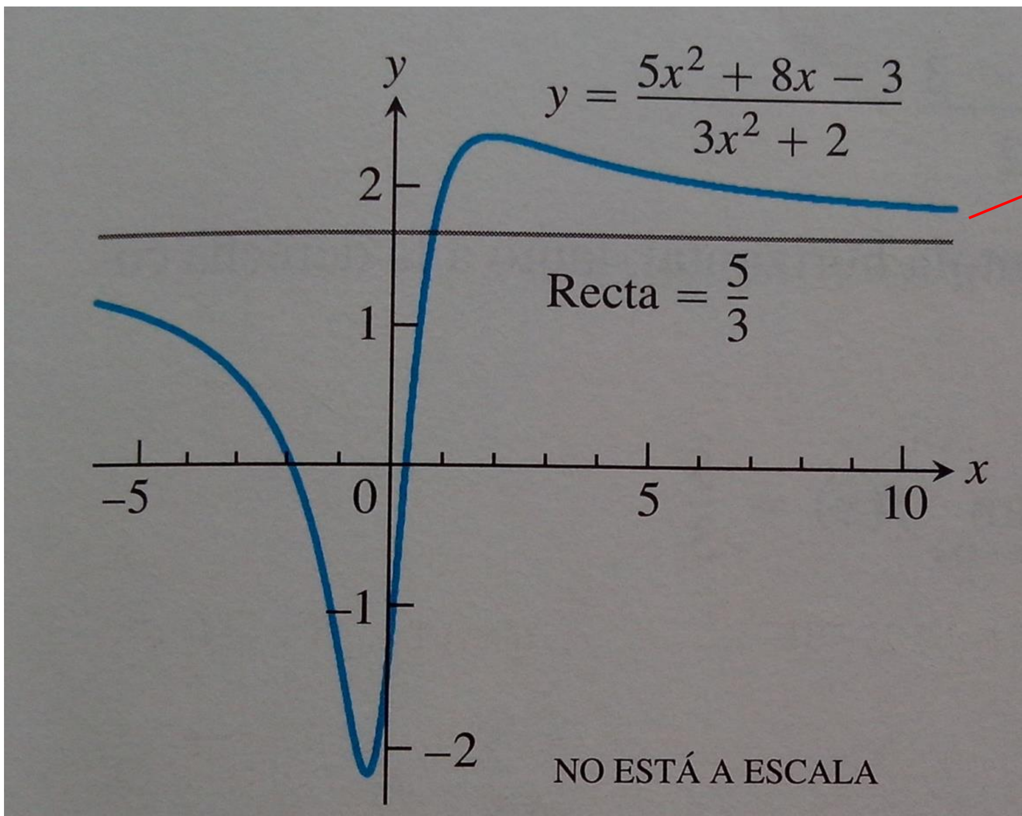
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x + 3}$$

Asíntotas horizontales

DEFINICIÓN **Asíntota horizontal**

Una recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función $y = f(x)$, si se satisface alguna de las condiciones siguientes

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$



ASÍNTOTA HORIZONTAL

$$y = \frac{5}{3}$$

Calculo analítico:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{5}{3}$$

Ejemplo:

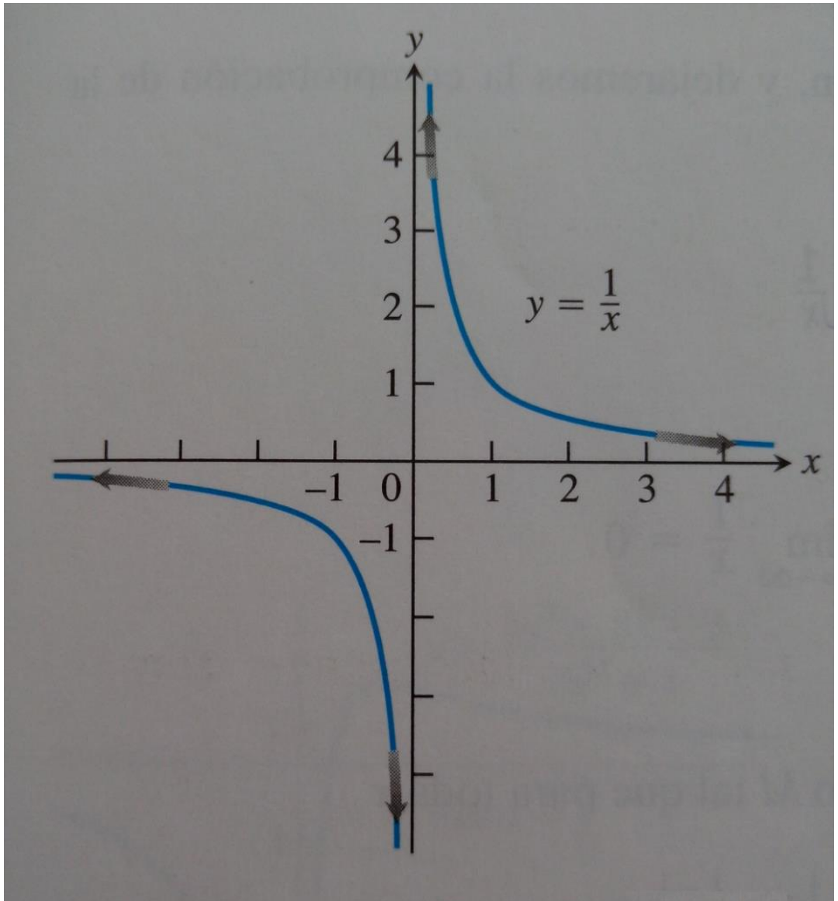
¿La función $f(x) = \frac{1}{x}$ presenta asíntotas horizontales?

Determinación analítica:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0}$$

Ecuación de la asíntota horizontal:

y=0



La gráfica de $y = 1/x$.