Facultad de Ingeniería
UNER

Álgebra y Cálculo

Tecnicatura universitaria en procesamiento y explotación de datos

TUPED - 1° C

Facultad de Ingeniería UNER

Unidad 1: Funciones de variable real

Función Cuadrática

TUPED - 1° C

Función cuadrática

Una función cuadrática tiene la siguiente forma general:

$$\boldsymbol{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

donde a, b y c son números reales, y $a \neq 0$

Al ser una función polinómica, tiene como dominio e imagen el conjunto de los números reales.

¿Cuál es la gráfica de una función cuadrática?

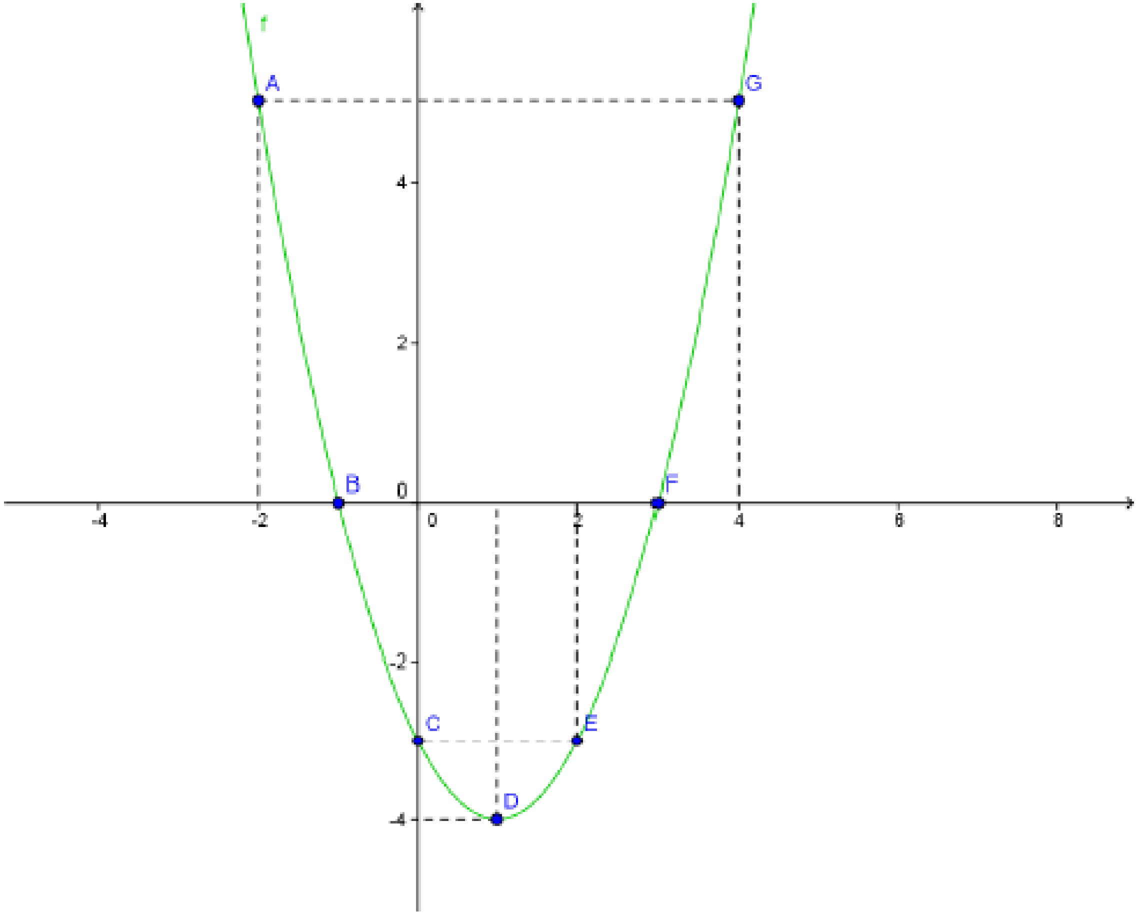
Podemos determinar la gráfica mediante una tabla de valores que se determina a partir de la expresión de $f(x)$.

Por ejemplo, grafiquemos la siguiente función mediante una tabla:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 3}$$

Tabla de valores para $f(x) = x^2 - 2x - 3$

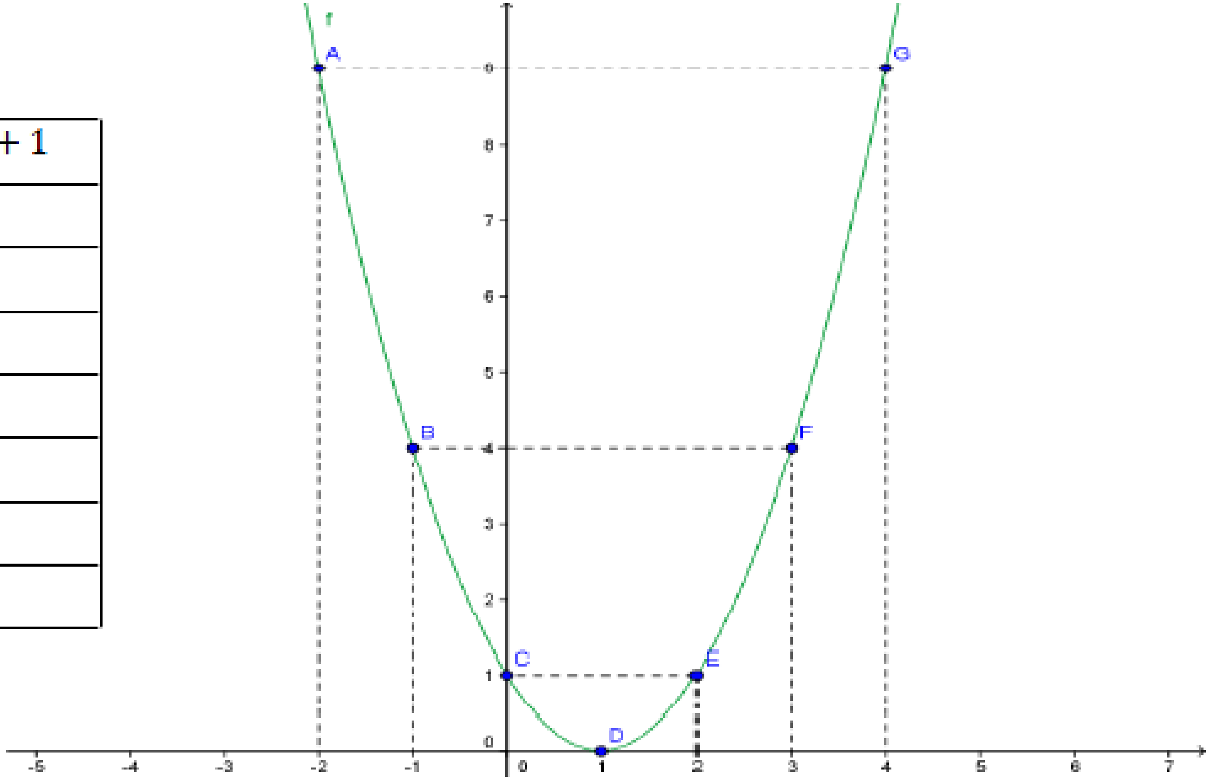
x	$f(x) = x^2 - 2x$ -3
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5



Gráfica de una función cuadrática

Toda función cuadrática tiene como gráfica una curva que se denomina **PARÁBOLA**

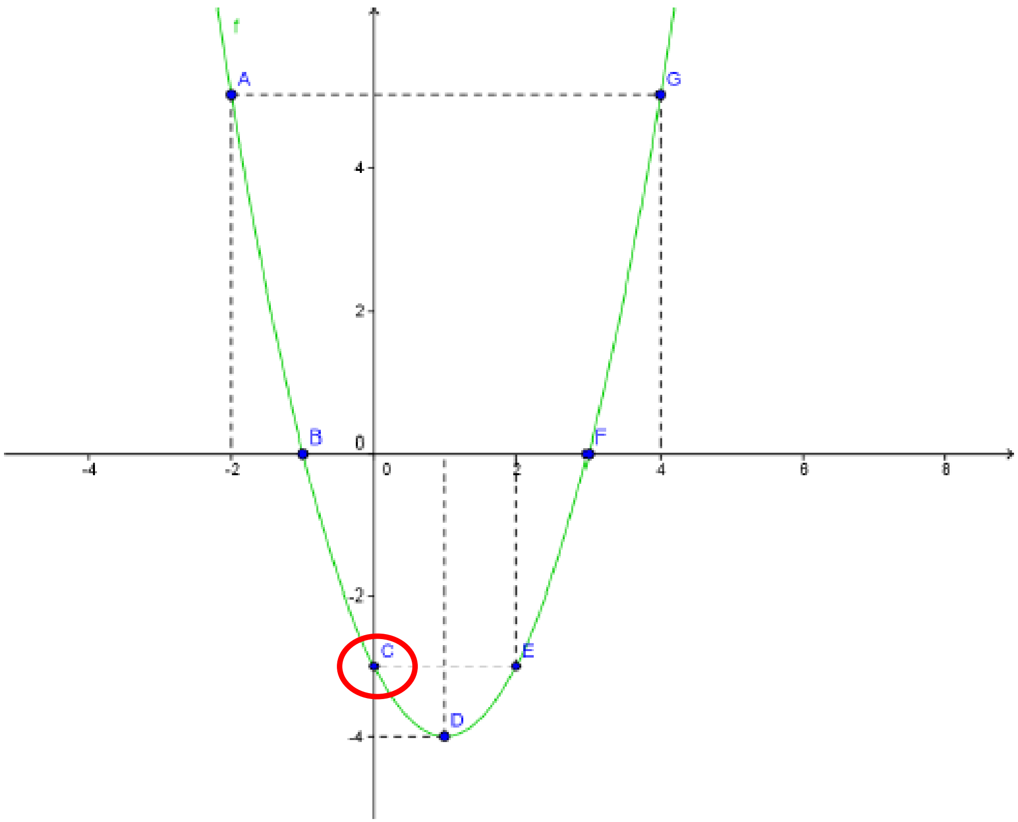
x	$f(x) = x^2 - 2x + 1$
-2	9
-1	4
0	1
1	0
2	1
3	4
4	9



¿Habrá alguna manera de graficar la curva de una función cuadrática de manera más directa?

Observemos la gráfica de la función y tratemos de encontrar información descriptiva que nos sirva para reconstruirla.

¿Cómo se llama el valor en donde la gráfica corta el eje y?



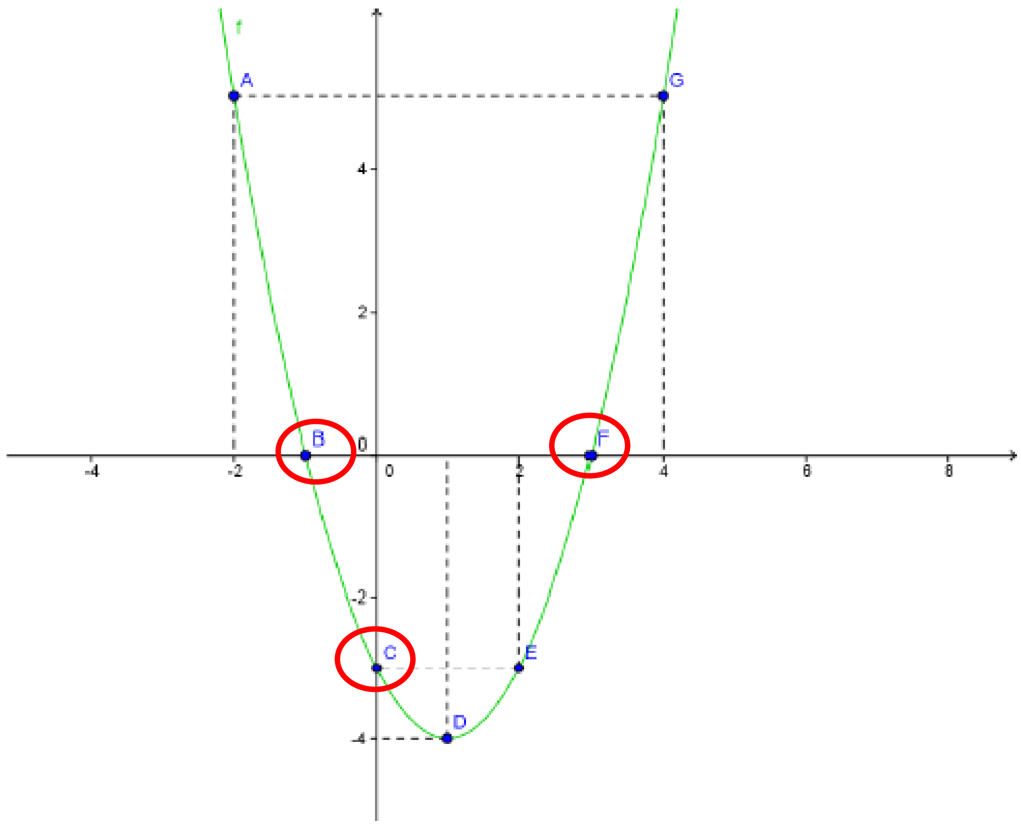
$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Ordenada al origen: c=3

Punto de Intersección con el eje y:

$(\mathbf{0}, \boldsymbol{c})$

Si la intersección de la gráfica con el eje y es un punto de interés.. ¿Qué ocurre con la intersección de la gráfica con el eje x?



La intersección se da cuando $f(x) = y = 0$

Los valores de *x* donde la gráfica corta al eje *x* se denominan

CEROS de la función (ANULAN la función)

Ceros de una función

Sea $f(x)$ una función, los valores de la variable independiente x que anulan la función, se denominan ceros de la función.

Por ejemplo : Calcular los ceros de $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 3}$

Debemos igualar la función a cero, es decir: $f(x) = 0$

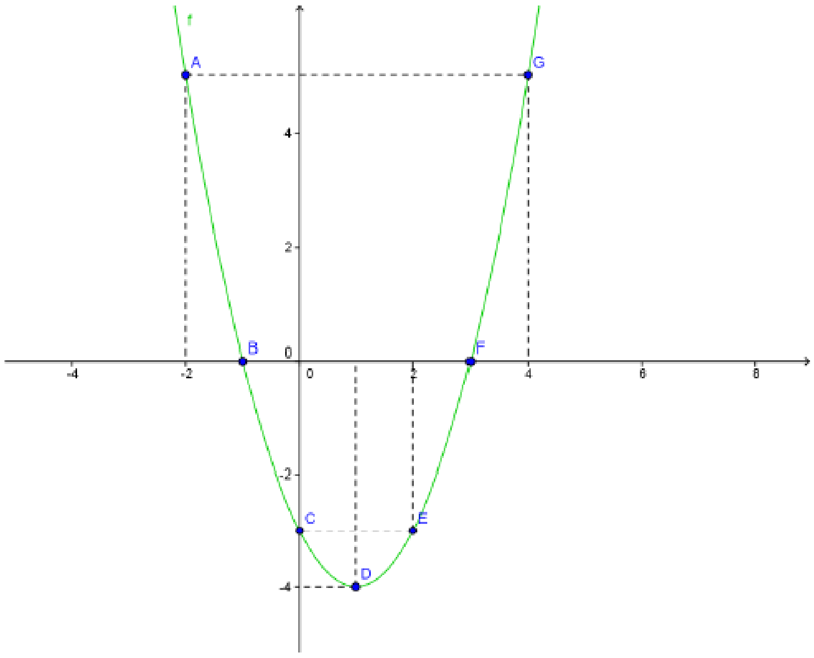
$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0}$$

Obtenemos una ecuación cuadrática.
¿Sabemos **resolverla**?

•

Seguimos buscando información..

x	$f(x) = x^2 - 2x$ -3
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

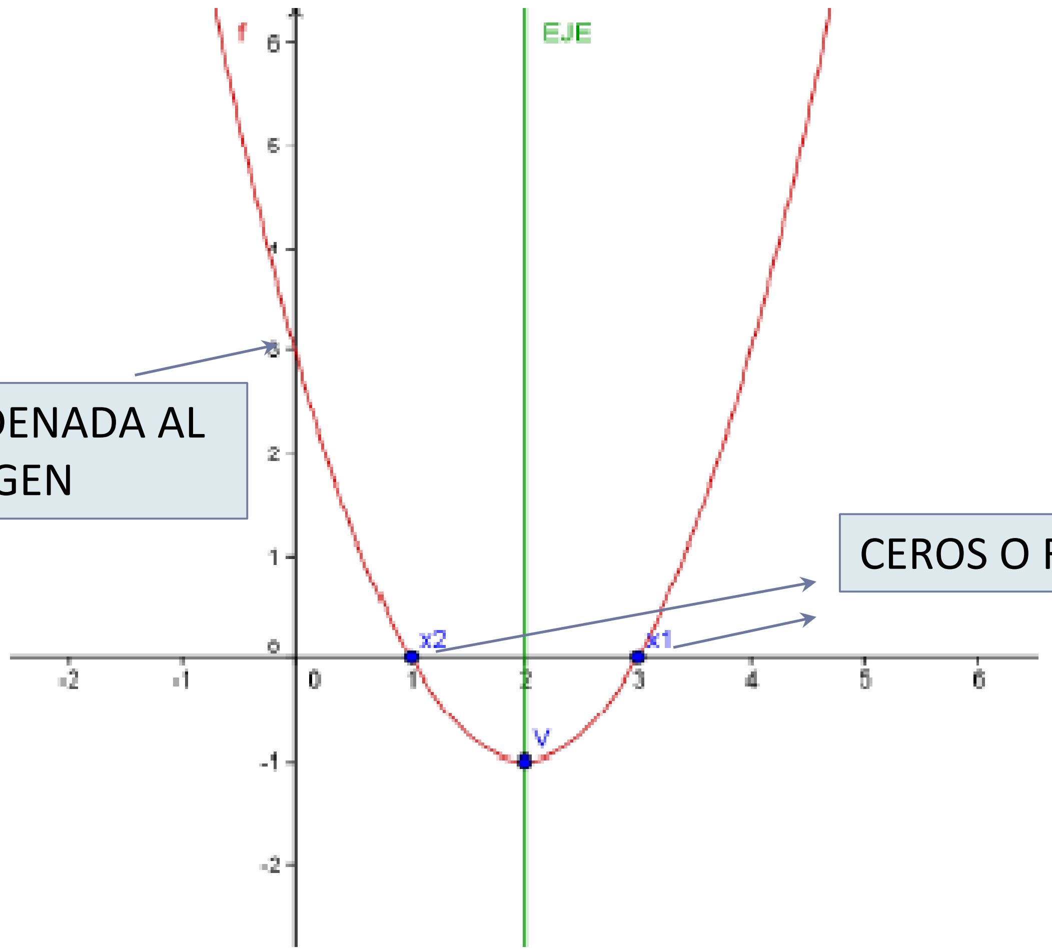


¿Qué se puede observar tanto en la gráfica como en la tabla, con respecto a ciertos valores de *x*?

Toda parábola presenta un EJE DE SIMETRÍA (de la forma ***x=a***) paralelo al eje de ordenadas.

Eje de simetría de una parábola

¿Cómo encontrar el eje de simetría?



ORDENADA AL ORIGEN

CEROS O RAÍCES

Ecuación eje de simetría

$$x_e = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Vértice de una parábola

Es el punto de intersección de la parábola con su eje de simetría.

¿Cómo se calcula?

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

$$V = (\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right))$$

¿Qué información sobre la gráfica nos da el discriminante de una ecuación cuadrática?

El discriminante

El **discriminante** de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

Interpretación gráfica de las raíces de una Función Cuadrática

¿Qué significa que una función tenga dos raíces reales diferentes, o que tenga dos raíces reales iguales, o que no tenga raíces reales?

¿Cómo grafico la intersección con el eje *x* si las raíces me dan reales e iguales?

¿Y si las raíces no pertenecen al conjunto de los reales?

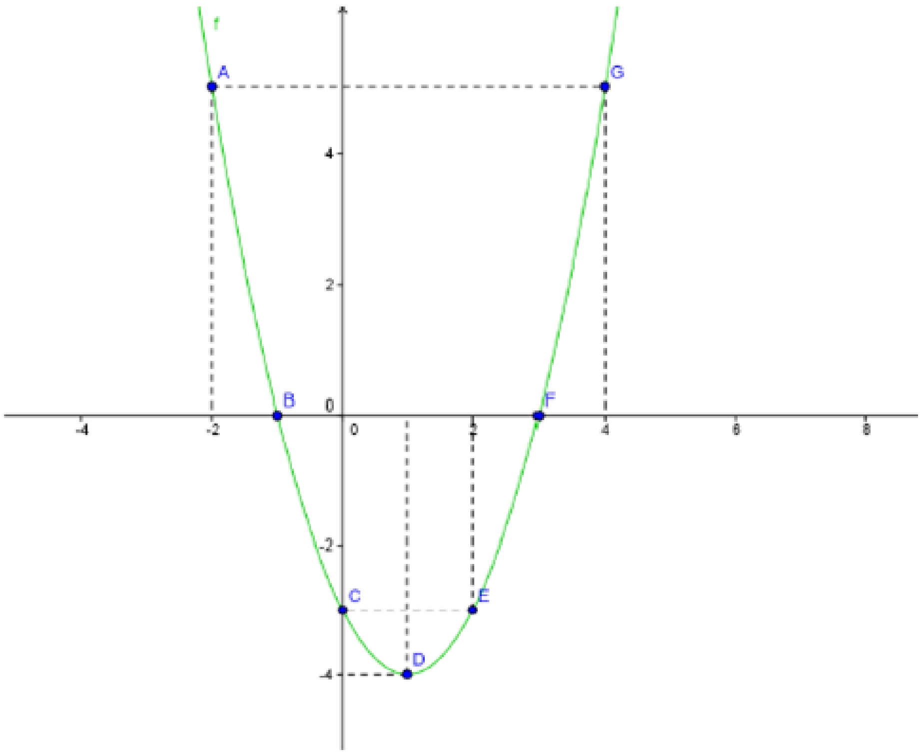
Raíces reales y distintas

¿Cómo son las raíces de la función *f(x)* cuando el discriminante es MAYOR A CERO?

Si el discriminante es mayor a cero, la parábola corta al eje de abscisas en **dos puntos**:

$$(x_1, \mathbf{0})\ y\ (x_2, \mathbf{0})$$

donde x_1 y x_2 **son las raíces de la función**



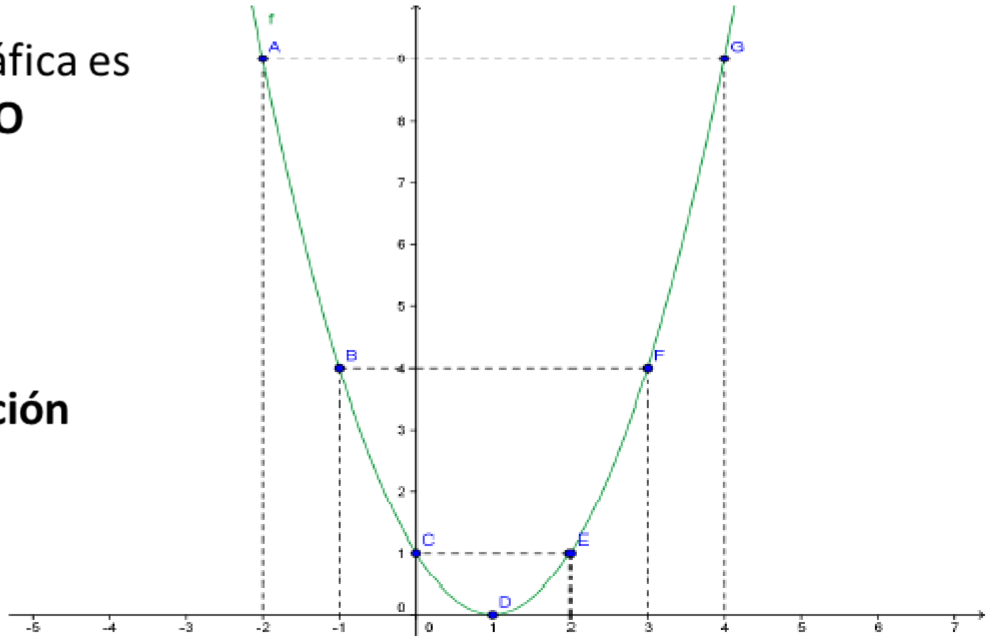
Raíces reales iguales

¿Cómo son las raíces de la función *f(x)* cuando el discriminante es IGUAL A CERO?

Si el discriminante es igual a cero, la gráfica es tangente al eje de abscisas en un **ÚNICO punto**:

$$(x_{1,2}, 0)$$

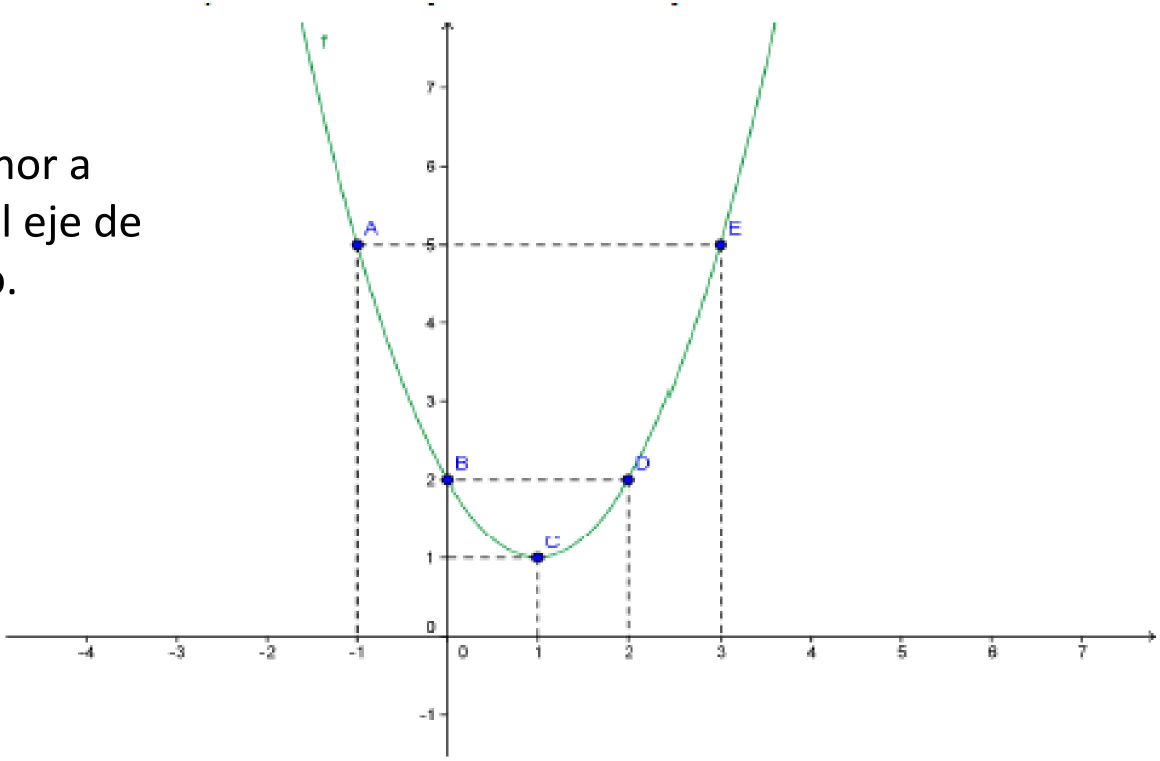
donde x_1 y x_2 **son las raíces de la función**



Raíces complejas conjugadas

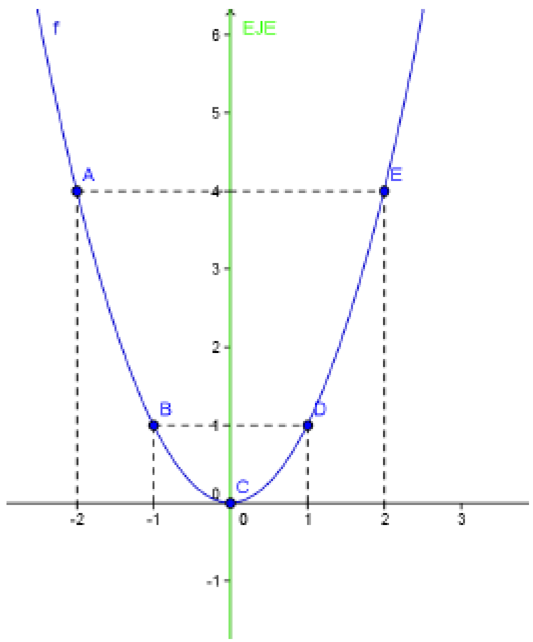
¿Cómo son las raíces de la función *f(x)* cuando el discriminante es MENOR A CERO?

Si el discriminante es menor a cero, la gráfica no corta al eje de abscisas en **ningún punto**.



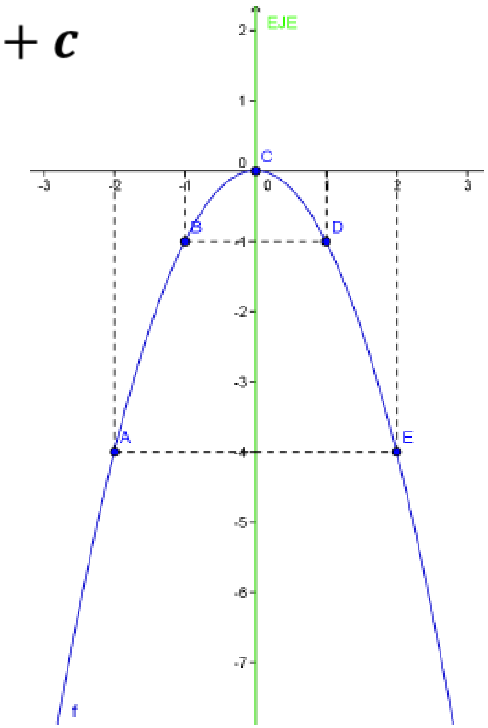
Concavidad de una parábola

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba.

El valor de la coordenada $\boldsymbol{y}$ del vértice es el **mínimo** de la función.



Si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo.

El valor de la coordenada $\boldsymbol{y}$ del vértice es el **máximo** de la función.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Si el vértice es un mínimo, la función

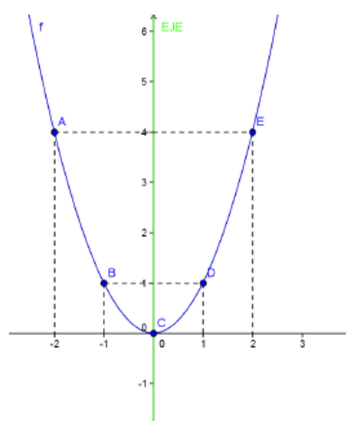
Decrece en el intervalo $(-\infty, x_v)$

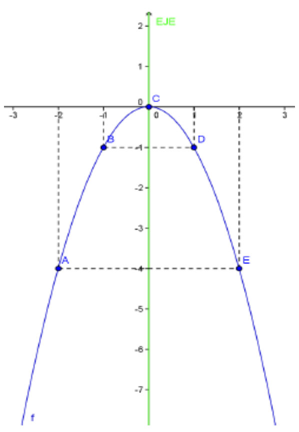
Crece en el intervalo $(x_v, +\infty)$

Si el vértice es un máximo, la función

Crece en el intervalo $(-\infty, x_v)$

Decrece en el intervalo $(x_v, +\infty)$





Forma factorizada de una función cuadrática

Dada la función cuadrática en su forma general:

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

La forma factorizada de $f(x)$ está dada por:

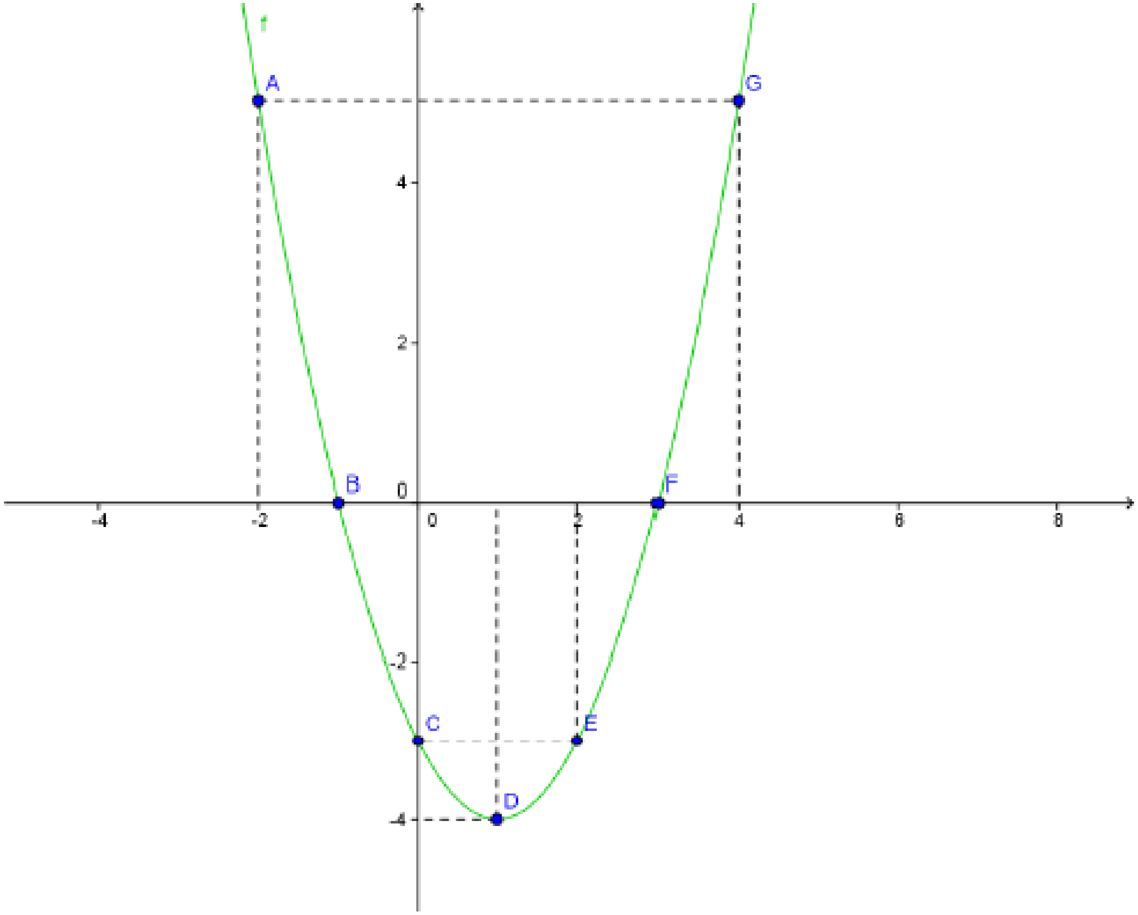
$$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)}$$

Siendo x_0 y x_1 las raíces de $f(x)$

La forma general y la factorizada representan la MISMA función, pero brindan diferente información en su expresión.

Realizar la gráfica de la siguiente función mediante sus elementos:

$$\boxed{f(x) = x^2 - 2x - 3}$$



Ejercicios:

Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$f(x) = (2x - 1)^2$$
$$f(x) = x^2 - x + 5$$

- Indique su dominio.
- Calcule los ceros, intersección con el eje y, eje de simetría, vértice y concavidad.
- Indique los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Realice su gráfica e indique su Imagen.

Halle la forma factorizada de las funciones anteriores.